純粹數學科課程及評估指引(高級程度)
與
中學課程綱要–純粹數學科(高級程度)1992
內容對照

本純粹數學科課程及評估指引(高級程度)是由一九九二年編訂之中學課程綱要純粹數學科(高級程度)修訂而成，主要是刪除或減少其中一些課題。爲方便教師參考，這些課題以 ▒ 方格覆蓋。說明及備註則列於 ▭ 方格內，讓教師較易掌握教學的內容和深度。

3. 課　程

單元 A1：數學語言

特定目標：

(1) 理解基本的集合語言。

(2) 理解基本邏輯。

內容	時間分配	教學建議
1.1 集合語言	5	有關本節需要引入的基本術語包括集、元素、子集、母集、冪集、空集、等集、不相交的集、全集、交集、併集、餘集和積集等。在引入上列的概念時，手法毋須過於嚴謹，惟教師宜於施教時能廣泛採用多樣化的簡單而實質的生活化例子來支援教學。有關的常用符號和記號亦應加以說明。以下是一些參考資料： (1) 一般來說，集是用大字母來代表的而小字母則代表元素。以下是一些常用的數集及其代表符號： 自然數集 N 整數集 Z；I 有理數集 Q 實數集 R 複數集 C (2) 集通常可用表列式 (即表列其所有元素) 如 A = { 2, 4, 6, 8, 10}　　或命題式 { x：p(x) } 如 A = { x：x ≤ 10，x 爲正偶數} 來表達。 (3) 在講解有關交集、併集和餘集的課題時，教師可引入一些有關的簡單而直接的運算法則和借助范氏圖所提供的直觀了解來說明一些概念如「交換的」、「結合的」和「分佈的」等。
1.2 基本邏輯	5	在本節需要引入的基本術語包括語句 / 命題、真值、合取、析取、否定式、條件式和雙條件式、等價句語、等價、蘊合式、量詞、例及反例。至於透過運用真值表來闡釋

▒ 表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
12		上列的連詞是一可行的辨法，惟在講解條件式和雙條件式時，重點的說明宜置於「若且」及「若且僅若」的形態，務使學生能充份掌握這兩種廣泛出現於數學研習中的概念。在施教時，教師應提供足夠的相關的生活化事例以助說明，而學生亦應能相對地提供例子以強化學習。整體來說，以課堂的討論形式來引入這些概念的方法比透過純理論的分析方法更爲值得注重。 爲着加強學生對於「充份條件」、「必要條件」和「充要條件」的認知，教師宜就下開所提供的兩命題例子與學生作課堂的討論和探索，從而了解何種條件適用於該等例句中： (1) x 和 y 均爲整數；xy 爲整數。 (2) x 和 y 均爲偶數；x + y 爲偶數。 (3) x 和 y 均爲偶數；x + y 及 xy 均爲偶數。 (4) 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有等根；$b^2-4ac = 0$ 再者，教師亦應將 $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$（逆反命題） 的意義運用上列的例句詳加說明和演繹。同時亦可提供一些運用反證法(歸謬法)的論證來作示範，以資鞏固。其中證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數者尤爲常用的例子。
	10	

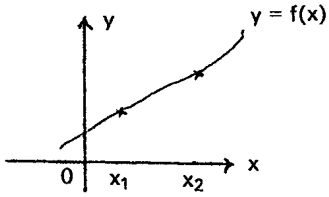
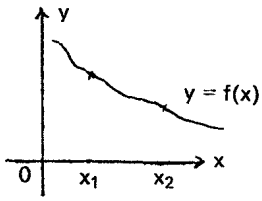
單元 A2：函數

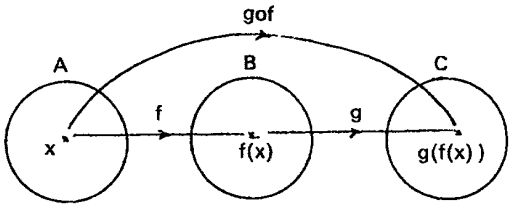
特定目標：

1. 將函數作爲學習其他數學單元的基本工具。
2. 繪畫及描述不同的函數。

內容	時間分配	教學建議
2.1 函數及其圖像	2	應教導學生認識清楚函數的定義，但函數的嚴格定義可不需深究，並可採用下列方式來說明函數的定義： $f : A \to B$ ，f 爲一由 A 至 B 的函數 假若 A 集中的每一元素均以某種方式匹配 B 集的唯一元素。A 集稱爲 f 的定義域，B 集稱爲 f 的值域。因函數 f 關係而對應於A集中元素 x 的 B集元素，通常用 f(x)表示，並稱爲 x 在函數 f 下的像。f [A]則稱爲 A 集在函數 f 下的像點集。在此，真值函數的意義須特別強調，因爲它們在本課程的其他單元中有廣泛使用，學生並須懂得如何繪畫函數的圖像。
2.2 函數的性質及運算	4	學生應該清楚知道內射、滿射和對射函數的定義，並能將它們分辨和將它們應用於解答有關問題。教師可採用下列提供的方法： 函數 $f : A \to B$ 爲 (i) 內射(一個對一個)若且僅若對集 A 中的元素 a_1、a_2，$a_1 \neq a_2$ 蘊涵 $f(a_1) \neq f(a_2)$，或者等價地，$f(a_1) = f(a_2)$ 蘊涵 $a_1 = a_2$； (ii) 滿射若且僅若 $f[A] = B$； (B 集之中的每一元素均爲 A 集之中某一元素的像點。) (iii) 對射(一一對應)若且僅若 f 爲一內射和滿射函數。 此時，教師應該已替學生在反函數 f^{-1} 的定義做好了預備，並可以推論出下列性質： f 爲一對射函數若且僅若其反函數 f^{-1} 存在。 再者，函數與其反函數(如存在的話) 的圖像僅爲直綫 y = x 上的反射。這個性質應利用足夠的例子來加以說明。
13		

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
14		學生應懂得分辨奇函數、偶函數、週期函數、遞增和遞減函數。對於這些函數，應給予學生清楚的定義。至於遞增和遞減函數的定義，在未曾學習微分法之前，可採納以下提供的定義： (i) f(x) 爲一遞增函數(嚴格遞增)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($(f(x_2) > f(x_1))$)； (ii) f(x) 爲一遞減函數(嚴格遞減)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \leq f(x_1)$ ($(f(x_2) < f(x_1))$)。  f(x) 是嚴格遞增  f(x) 是嚴格遞減 這些性質對繪畫曲綫和計算定積分均甚爲有用。 對於函數的運算，教師應與學生討論下列各點：設 f、g 爲函數，則 f +g、f –g、f × g 及 f/g (在考慮範圍下的所有 x，$g(x) \neq 0$) 均爲函數。 至於複合函數，因爲它們在微分學中對學習鏈式法則極爲重要，故需要給予學生足夠的例子，以便他們能夠掌握複合函數的概念。教師可引用以下例子，並列舉其他真值函數的例子作爲解釋。 若函數 $f : A \to B$ 及 $g : B \to C$ 則 f 與 g 的複合函數爲 $g \circ f : A \to C$ 及對 A 集內所有元素 x， $g \circ f(x) = g(f(x))$ 。

內容	時間分配	教學建議
15		
2.3 代數函數	2	學生應對下列的代數函數有所認識： (*a*) 多項式函數； (*b*) 有理函數 ； (*c*) 冪函數 x^{α}，其中α 爲有理數； (*d*) 由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他代數函數、例如 $\sqrt{x^2+1}$ 。
2.4 三角函數及其公式	14	學生應懂得繪畫六個三角函數及其反函數的圖像。下列有關三角函數的基本關係應與學生詳細討論： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \mathrm{cosec}^2\theta$ 學生並應懂得三角函數在 $(\frac{n\pi}{2} \pm \theta)$時的化簡 (當 n 爲奇數或偶數)。其餘有關的應用和公式亦應一併教授。 (1) 複角公式 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
16		(2) 倍角公式 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $= 2\cos^2 A - 1$ $= 1 - 2\sin^2 A$ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ (3) 半角公式 $\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\cos A)$ $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos A)$ $\sin A = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ； $\cos A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 其中 $t \equiv \tan\dfrac{A}{2}$ (4) 和及積公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

內容	時間分配	教學建議
17 **2.5 指數函數及對數函數**	6	$\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$ $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ $\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B)-\sin(A-B))$ $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$ $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$ 其實；大部份公式均爲基本定義的引申，故此教師應鼓勵學生將它們證明出來，並討論將數式 $a\cos x + b\sin x$ 轉變爲 $r\sin(x+\alpha)$ 或 $r\cos(x+\beta)$的方法。將上述各個公式應用在恒等式的證明和計算三角方程式的解亦應包括在課程內。 學生應對指數函數和對數函數之間互爲反函數的關係有所認識。對數的定義需加以温習： $\log_a x = y$ 若且僅若 $x = a^y$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$。 對於包含有變數 x 的對數函數，學生應知道它們其實祇是 logx 或函數 f(x)的對數函數而已。例如： $(\log_{10} x)^2$ 和 $\log_e(1+\tan x)$ 等。 對數函數的一些特性應加以學習。 設 $f(x) = \log_a x$ ，其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$； (i) f(x) 祇在 $x > 0$ 上能夠定義； (ii) 當 $a > 1$ 時，f(x)是一遞增函數，而當 $0 < a < 1$ 時，f(x)是一遞減函數； (iii) 當 b、$c > 0$ 及 $b \neq 1$ ， $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$ ； (iv) $f(a) = \log_a a = 1$ ； (v) $f(1) = \log_a 1 = 0$ 。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
18		對於指數函數，應教導學生相應的處理方法。設 a 爲一正常數和 x 爲一變數，則函數 a^x 爲一指數函數。其特性爲： 設 $f(x) = a^x$　其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$， (i)　f(x) 對所有實數均可定義； (ii)　當 $a > 1$ 時，f(x)爲遞增函數而當 $0 < a < 1$，f(x)則爲遞減函數； (iii)　$f(0) = a^0 = 1$。 學生應懂得繪畫下列圖像： (i)　對數函數 $f(x) = \log_a x$　當 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ (ii)　指數函數　當 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 在此時，教師可引領學生去擴闊他們在對數函數和指數函數的認識。 (i)　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ii)　$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 和 (iii)　$\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 。 〔請注意 (iii) 僅爲對數函數的另一定義而已，$\log_e x$ 可寫爲 $\ell n\, x$ 〕 對數函數和指數函數的性質應予討論。 對數函數　$f(x) = \log_a x$　其中 $a > 0$，$a \neq 1$， (i)　$f(x) + f(y) = f(xy)$ (ii)　$f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ (iii)　$f(x^n) = nf(x)$

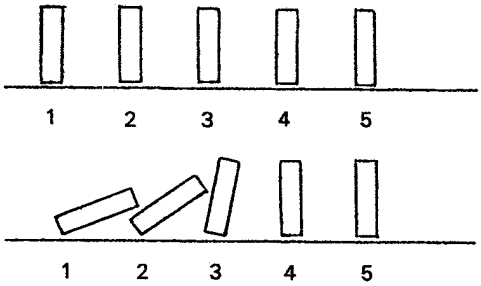
內容	時間分配	教學建議
19		指數函數　$g(x) = a^x$　其中 $a > 0$ (i)　$g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ (ii)　$g(x - y) = \frac{g(x)}{g(y)}$ (iii)　$g(nx) = (g(x))^n$ 至於函數 e^x 和 $\ell n\, x$ 在學習數學時的重要性應加以指出。
	28	

表示刪去的內容

單元 A3：數學歸納法

特定目標：

1. 理解數學歸納法原理。
2. 運用數學歸納法原理證明有關正整數的命題。
3. 能修改數學歸納法原理以適合不同的需要。

內容	時間分配	教學建議
3.1 數學歸納法原理及其應用	6	作爲一簡單介紹，教師可要求學生考慮 $1 = 1$ $1 + 3 = 4$ $1 + 3 + 5 = 9$ …… …… 去推測首n個奇正整數之和的公式。建立了命題 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$之後，學生在引導下應能理解到若僅驗證了有限次，他們還不能肯定此命題的一般正確性。教師可隨即示範利用數學歸納法去證明上述命題。 教師宜明確地將數學歸納法原理寫在黑板上，並可利用骨牌遊戲去幫助解釋其原理： 

內容	時間分配	教學建議
3.2 數學歸納法原理的其他常見形式及 其應用 不包括 反向歸納法	~~6~~ 5	教師應舉不同例子示範數學歸納法之應用，例子宜包括級數和、整除性及一些不等式的證明。數學歸納法原理在不同情況下有不同的變更。教師可用例子說明去證明命題一定要同時滿足數學歸納法的兩個條件，缺一不可。其他應用包括證明： (i) 正整指數的二項式定理 (ii) 棣美弗定理，其中 n 爲正整數 (iii) 一些和行列式及方陣有關的命題 (iv) 萊布尼茲定理及一些和 n 階導數有關的命題 作爲較深入的研究，教師可以和學生討論一些需要用歸納法的其他形式之情況。 *例*： $x^n + y^n$ 可被 $x + y$ 整除，其中 n 爲奇正整數。 *例*： 斐波那契序列定義如下： $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ ，其中 n 爲自然數。 證明 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 。 教師應指出有必要修改數學歸納法原理才能證明上述兩例子。教師宜討論一些以遞推公式定義的序列例子。
	~~12~~ 11	

21

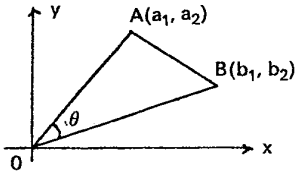
表示刪去的內容

單元 A4：不等式

特定目標：

1. 學習不等式的基本性質。
2. 證明簡單絕對不等式。
3. 解簡單條件不等式。

內容	時間分配	教學建議
22 **4.1 絕對不等式**	6	學生應能正確地運用符號 $a > b$ 及 $a \geq b$。教師應和學生溫習不等式的基本性質，其中應包括 (i) 對一任意實數 x， $x^2 \geq 0$ (ii) 若 $a > b > 0$ 及 n 爲一正整數，則 $a^n > b^n$ 及 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (iii) 若 $a > b > 0$ 及 $x > y > 0$，則 $ax > by$； 惟無須涉及這些基本性質之嚴謹證明。學生應能從這些基本性質推算出簡單的絕對不等式。處理絕對不等式的證明，教師可強調以下的技巧： *例*： 證明 $E_1 \geq E_2$ 證： $E_1 - E_2 = ...$ $= .....$ $= .....$ ≥ 0 $\therefore E_1 \geq E_2$
4.2 A.M. ≥ G.M.	4	作爲 A.M. ≥ G.M. 的初步認識，教師可提供最多至四個變數的證明，而不強調此定理的一般性證明。若有需要，教師可用反向歸納法去證明此定理。學生須要懂得如何運用此結果至 n 個變數。
4.3 柯西——許瓦爾茲不等式	3	學生應理解二次式 ax^2+bx+c 恒爲正數的充要條件爲 $a>0$ 及 $b^2-4ac<0$，並應能利用此結果去解如「若 $cx^2+4x+c+3$ 恒爲正數，其中 x 爲實數，求 c 之範圍。」的問題。柯西——許瓦爾茲不等式可從上述結果證明。

內容	時間分配	教學建議
23		n = 2 的柯西——許瓦爾茲不等式的幾何意義可從坐標平面得出。 $\cos\theta = \dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$ $= \dfrac{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right]}{2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ $= \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ $\cos^2\theta = \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$  因爲 $\cos^2\theta \leq 1$， $\therefore (a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$ 學生應能應用此不等式去解有關的簡單問題。
4.4 條件不等式	7	學生宜溫習實綫上的區間概念。實數的絕對值的定義及性質應予討論。學生應能解綫性不等式、一元二次不等式及一元高次不等式。教師應和學生討論含有絕對值的不等式解法，例如 $\lvert ax^2+bx+c\rvert \geq d$， $\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert \geq c$ 及 $(x-a)\lvert x-b\rvert \geq c$。 教師亦應對如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ 形式的不等式加以討論，其中 P(x)及 Q(x)均爲多項式。上述不等式的複合不等式亦應給予指導。
	20	

表示刪去的內容

單元 A5：正整指數的二項式定理

特定目標：

1. 學習及應用正整指數的二項式定理。
2. 學習二項式定理係數的簡單性質。

內容	時間分配	教學建議
5.1 正整指數的二項式定理	3	學生應學習如何求 n!及 C_r^n 的值。正整指數的二項式定理可用數學歸納法證明。涉及 C_r^n 符號的討論只限於作爲二項式定理係數之用。教師可指出帕斯卡三角形及二項式定理係數 C_r^n 的關係。學生並不須要學習一般二項式定理。
5.2 正整指數的二項式定理的應用	5	學生應能利用正整指數的二項式定理展開有關的數式。教師應指導學生如何求二項展式中某特殊項或某特殊項的係數。學生亦應能求出二項展式中的最大項和最大係數。近似值的應用亦可予以討論。
5.3 二項式係數的簡單性質	5	學生應知道 C_r^n 及 $\binom{n}{r}$ 均可用作二項式定理係數的符號。討論宜包括二項式係數的簡單性質及二項式係數的關係如 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$ ； $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 及其他類似關係。 註：排列及組合可以用來引入二項式定理，但有關排列及組合的問題並不需要。學生學習微積分後，教師可引入涉及應用微分和積分的二項式係數問題。
	13	

24

單元 A6： 多項式及方程

特定目標：

1. 學習單變量的實係數多項式的性質。
2. 學習除法算式、餘式定理和歐幾里德算法與及它們的應用。
3. 分解有理函數爲分項分式。
4. 學習單變量的實係數多項式方程的根的性質。

內容	時間分配	教學建議
6.1 單變量的實係數多項式	5	學生應學習單變量的實係數多項式的一般式和下列各項名稱： 非零多項式的次、首項係數、常數項、首一多項式、零多項式。 學生亦應學習兩多項式的等式、和、差及積。 由定義可知，對非零多項式 f(x)、 g(x) deg {f(x) g(x)} = deg f(x) + deg g(x) 和deg {f(x) + g(x)} ≤ max {deg f(x)，deg g(x)}。 應定義兩非零多項式的最高公因式 (G.C.D. 或 H.C.F.)。 學生應清楚除法算式和歐幾里德算法的分別。由除法算式可證明餘式定理，因學生在中學時已學習餘式定理，固教師可給予較深的題目。歐幾里德算法是求兩多項式的最高公因式的一種方法，教師應給予學生練習一些求兩多項式的最高公因式的題目。.
6.2 有理函數	4	應首先定義有理函數。學生可能初次接觸分項分式，教師可引用一簡單例子，如 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 。 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 稱爲分項分式。 教師應清楚說明分解真有理函數爲分項分式的法則，並舉例說明。應舉例強調及說明，若一有理函數爲假有理函數時，應先將它表爲一多項式及真有理函數的和。

25

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
6.3 單變量的實係數多項式方程	6	學生應學習分項分式的應用。 *例*： 1. 表 $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$ 爲分項分式。 2. 分解 $\frac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$ 爲分項分式。 3. 計算 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 的值。 對於二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 與及它的根α、β，學生應熟悉下列關係： $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 。 對一般 n 次多項式方程， $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ 或 $\sum_{k=0}^{n}a^kx^k=0$ ， 下列定理給出係數與根的關係： 若 α_1，α_2，…，α_n 爲多項式方程 f(x) = 0 的根，則一切可能的 k 個根α_j (k = 1，2，. . .，n) 的乘積的和 S_k 等於 $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$ ， 即是，如 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ 則 $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ $S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$ $S_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

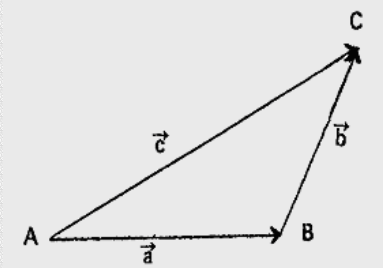
內容	時間分配	教學建議
	15	…… …… $S_n=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ 。 學生應仔細學習下列性質： (i) 非零多項式的相異根的數目小於或等於多項式的次。 (ii) 若一個整數係數多項式方程的根爲有理數 $\frac{p}{q}$ ，其 p 和 q 是互素的整數，則 p 整除多項式的常數項，而 q 整除多項式的首項係數。 (iii) 多重根的條件： $x=\alpha$ 是多項式方程 f(x) = 0 的多重根的充要條件是 $f(\alpha)=0$，且α是方程 $f'(x)=0$ 的根，其中 f'(x)是 f(x)的導數。 以下是較爲一般的形式： 對於正整數 k，α是方程 f(x) = 0 的 k + 1 重數根當且僅當 $f(\alpha)=0$ ， 並且α爲 $f'(x)=0$ 的 k 重數根。 和 α爲方程 f(x) = 0 的 k+1 重數根當且僅當α爲下列方程公根： $f(x)=0$， $f'(x)=0$， ⋮ $f^{(k)}(x)=0$ 但α 不是 $f^{(k+1)}(x)=0$ 的根。 註：以共軛偶出現的複數根會在單元 A10 複數中學習。

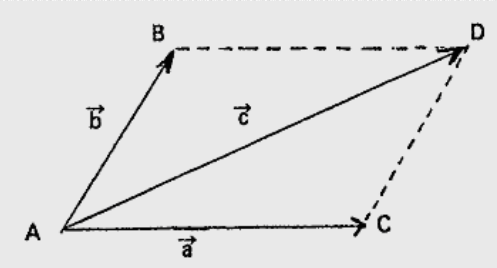
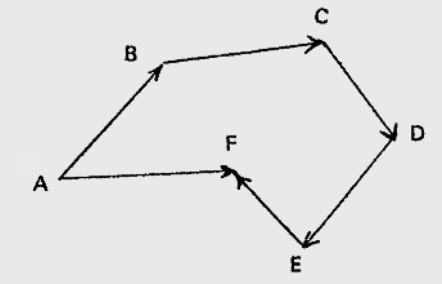
表示刪去的內容

單元 A7：R^2 及 R^3 的向量

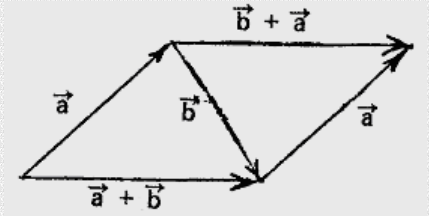
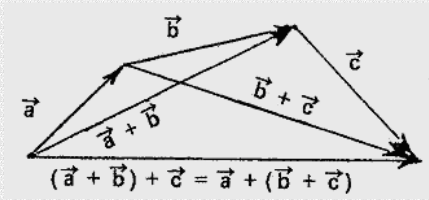
特定目標：

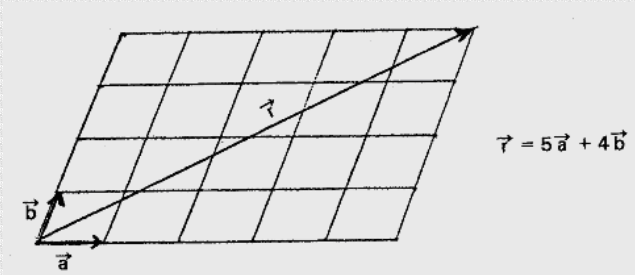
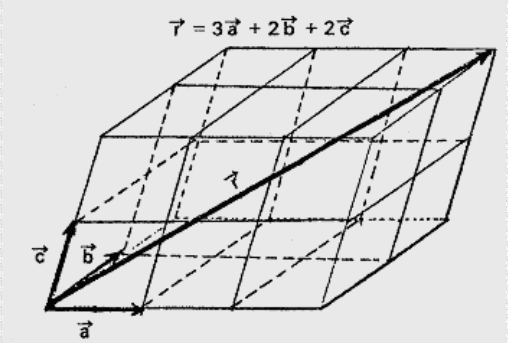
1.學習 R^2 及 R^3 的向量運算。
2.理解向量的綫性相關及綫性無關的概念。
3.向量在幾何問題上的應用。

內容	時間分配	教學建議
7.1 向量及純量的定義	1	教師應在此單元開始時對學生解釋向量及純量的分別和介紹表示向量的圖解及寫法。現行的向量記法（如 $\overrightarrow{AB}$ 、**AB**、$\bar{a}$ 、**a**）及向量大小的記法（如 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{AB}\rvert$、$\lvert\bar{a}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{a}\rvert$）都應教授。下列各項 ： 零向量、單位向量、等向量、負向量、共綫向量及共面向量亦應定義。
7.2 向量的運算	7	學生應認識向量加法定律〈即三角形定律、平行四邊形定律及多邊形定律〉，向量減法及純量乘法。 (i) 三角形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 當使用此定律求 $\vec{a}+\vec{b}$ 時，教師須指出向量 $\vec{a}$ 的終點應與向量 $\vec{b}$ 的始點重叠。亦應讓學生注意當 A、B 及 C 點共綫時，此定律仍然適用。

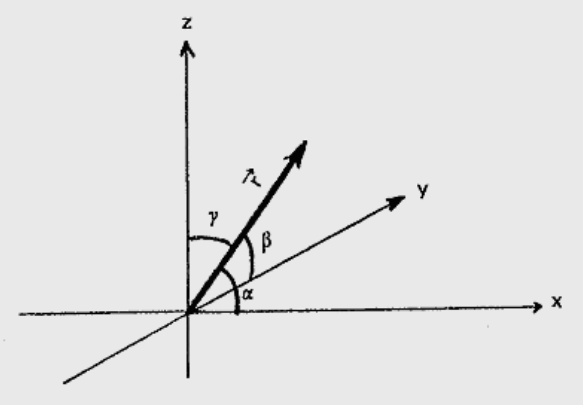
內容	時間分配	教學建議
		(ii) 平行四邊形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 同樣地，教師應提醒學生向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的始點應重叠，而在上兩圖中 $\vec{c}$ 可視爲 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量和。三角形定律和平行四邊形定律的等價性是值得討論的。 (iii) 多邊形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		向量代數定律如交換律、結合律和分配律應介紹給學生認識。下列各圖有助解釋各性質。 (a) 加法交換律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$  (b) 加法結合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$  (c) 純量乘法結合律： $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ 純量乘法分配律： $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ 明白純量乘法概念後，學生應不難得出： 若 $\vec{a}=\alpha\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 爲非零向量而α爲一些純量，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平行向量。

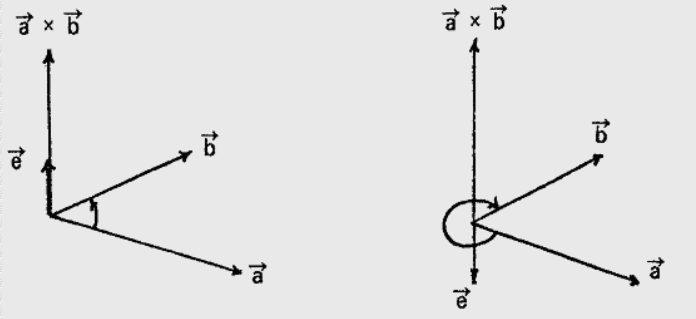
內容	時間分配	教學建議
		學生應清楚在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中將向量分解爲分量及以分量和表示另一向量的方法。$\mathbf{R}^2$ 中的向量分解可以下列例子介紹。在第一個例子中，向量 $\vec{r}$ 分解爲兩個分別在方向 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量 $5\vec{a}$ 及 $4\vec{b}$，由此可推廣至 $\mathbf{R}^2$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 爲不共綫向量和在 $\mathbf{R}^3$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 爲非共面向量和α、β及 γ爲純量。 *例*： 1.  2.  再者，教師應和學生討論以向量分量表向量的純量乘法、加法及減法。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
7.3 於直角坐標系中的向量分解	2	教師應詳細解釋 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分別是在正 x－軸、 y－軸及 z－軸的單位向量和在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中任一向量可用 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 表示。 學生須認識以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示的向量的性質： (i) $\lvert a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\rvert=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (ii) 若 $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$ ， 則向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 與 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 平行。 再者，教師應用圖解釋向量 $\vec{r}$ 的方向比、方向餘弦及方向角。下列性質亦應加以討論。 (i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (ii) $\dfrac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ 。 

內容	時間分配	教學建議
7.4 向量的綫性組合	4	教師應說明下列定義： (i) 若 $\vec{r_1}$ ，$\vec{r_2}$ ，$\vec{r_3}$ ，…，$\vec{r_n}$ 爲一個向量集，則 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+...+\lambda_n\vec{r_n}$ ，其中 λ_1 ，λ_2 ，λ_3 ，…，λ_n 爲純量，稱爲 $\vec{r_1}$ ，$\vec{r_2}$ ，$\vec{r_3}$ ，…，$\vec{r_n}$ 的向量綫性組合。若各純量 λ 非全爲零，則此綫性組合稱爲非平凡，否則爲平凡綫性組合。 (ii) 若向量 $\vec{r_1}$ ，$\vec{r_2}$ ，$\vec{r_3}$ ，…，$\vec{r_n}$ 存在一等於零的非平凡綫性組合，則它們稱爲綫性相關，即 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+...+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，其中有部分 $\lambda_i\neq 0$ ，i = 1，2，3，…，n。 (iii) 若向量 $\vec{r_1}$ ，$\vec{r_2}$ ，$\vec{r_3}$ ，…，$\vec{r_n}$ 的唯一等於零的綫性組合就是平凡綫性組合，則它們稱爲綫性無關，即若 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+...+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，則 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=...=\lambda_n=0$ 。 教師應協助學生由(ii)得出一個即時結果，就是向量 $\vec{r_1}$ ，$\vec{r_2}$ ，$\vec{r_3}$ ，…，$\vec{r_n}$ 爲綫性相關當且僅當其中一個向量是同組中其他向量的綫性組合。 在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中綫性相關向量的幾何意義應加以說明。如 (i) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 及 $\vec{r_2}$ 爲綫性相關當且僅當它們是平行向量； (ii) 在 $\mathbf{R}^3$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 、$\vec{r_2}$ 及 $\vec{r_3}$ 爲綫性相關當且僅當它們是共面向量。
7.5 純量 (點) 積及向量 (叉) 積	6	兩個向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的純量積，寫作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ，定義爲 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ ，其中 θ 爲 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之間的夾角。下列各性質應加以討論： 1. 純量積的交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. 純量積的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$ 4. 兩非零的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 爲正交當且僅當 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 5. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
34		教師應特別指出由第 5 點用純量積可求出以笛卡兒分量表示兩向量的交角。教師應指導學生求證 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$、$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 等及 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$、$\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$、$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。 向量積的定義須清楚介紹，教師亦應特別說明右手系統的正確方法。兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量積，寫作 $\vec{a}\times\vec{b}$，定義爲 $\vec{a}\times\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta\,\vec{e}$，其中 (i) $\vec{e}$ 爲垂直於 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的單位向量； (ii) θ爲 由 $\vec{a}$ 量度至 $\vec{b}$ 的角度，而量度是根據右手法則來決定 $\vec{e}$ 的方向。  下列各性質有討論的必要： (i) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 及 $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$ (iii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (iv) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

內容	時間分配	教學建議
35 **7.6 向量在幾何的應用**	11	學生應自已求證 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$ 、 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 等用來計算以笛卡兒分量表示兩向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 及 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 的向量積， $\vec{r_1}\times\vec{r_2}=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$ 或 $=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ 下列兩個性質有助學生掌握向量積的概念： (i) 兩非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行當且僅當 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$； (ii) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$可視爲由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所組成的平行四邊形的面積。 教師應詳細解釋相對向量的用途，包括位置向量和位移向量。P 及 Q 兩點對基準點 O 的位置向量通常分別以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 或 $\vec{p}$、$\vec{q}$ 表示，而 $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ 亦應加以強調。 教師應導出下列結果而其他有關的推論亦值得討論。 分點的位置向量： 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{p}$ 分別爲 A、B 及 P 對基準點 O 的位置向量。若 P 以 m:n 的比分綫段 AB，則 $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$。 內分點與外分點的處理方法應分別討論。爲準備學生學習通過 A、B 兩點的直綫的向量方程，建議採用公式 $\vec{p}=\dfrac{k\vec{a}+\vec{b}}{1+k}$。在笛卡兒坐標系中，若 A 爲$(x_1，y_1，z_1)$、$B(x_2，y_2，z_2)$ 及 $P(x，y，z)$，學生不難得到一直綫的兩點式 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
36		於此，學生應先學會寫出向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 的方向數，從而將兩點式轉爲 (i) 對稱式 $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 及 (ii) 參數式 $x=x_1+\ell$ $y=y_1+m$ $z=z_1+n$ 其中 $\ell:m:n$ 代表直綫的方向數。 作爲一個延續，通過點 $(x_1，y_1，z_1)$ 而法綫的方向比爲 $\ell:m:n$ 的平面方程可作爲純量積的應用： $\ell(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$ 在此，平面方程的通式 $Ax+By+Cz+D=0$ 亦可介紹作爲補充材料，並討論下列各性質。 (i) 平面法綫的方向比爲 $A:B:C$。 (ii) 由點 $P(x'，y'，z')$到平面的垂直距離爲 $\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，其中符號的選擇在使整個表達式爲正數。 (iii) 兩平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夾角θ可 由下式求得 $\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 。 (iv) $\pi_1 // \pi_2$ 當且僅當 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$； $\pi_1 \perp \pi_2$ 當且僅當 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

內容	時間分配	教學建議
37	31	(v) 平分兩個平面π_1及π_2的夾角的平面方程爲 $\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 。 由綫及平面的普通知識，教師可引導學生知道 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 代表兩平面 π_1及π_2 (若不平行) 的相交綫，而這直綫的方向比爲 $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}$ 。 下列有關方向比爲 $p:q:r$ 的直綫 L 及平面π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的性質應予討論： (i) $L // \pi$ 當且僅當 $Ap+Bq+Cr=0$ (ii) $L \perp \pi$ 當且僅當 $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$ (iii) L 與 π 的夾角 θ 由下式得出 $\sin\theta=\left\lvert\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\right\rvert$ 兩直綫共面的條件亦應學習，即兩直綫共面當且僅當此兩直綫相交或平行。假若 L_1是 $\frac{x-a_1}{p_1}=\frac{y-b_1}{q_1}=\frac{z-c_1}{r_1}$ 及 L_2是 $\frac{x-a_2}{p_2}=\frac{y-b_2}{q_2}=\frac{z-c_2}{r_2}$ ， L_1與 L_2共面當且僅當 $\begin{vmatrix}a_1-a_2 & p_1 & p_2\\b_1-b_2 & q_1 & q_2\\c_1-c_2 & r_1 & r_2\end{vmatrix}=0$ 在此小單元中，教師應鼓勵學生應用向量方法來導出上述的性質和結果，尤其是利用點積求一向量 $\vec{p}$ 在另一向量 $\vec{r}$ 上的投影及利用叉積求一個給定三頂點的三角形面積。

表示刪去的內容

單元 A8：矩陣

特定目標：

1. 學習矩陣的概念及運算。
2. 學習二階方陣及三階方陣的性質和運算及其行列式。
3. 矩陣在二維幾何上的應用。

內容	時間分配	教學建議
8.1 矩陣及其運算	4	教師應介紹一個有 m 行和 n 列矩陣的通式，即 $m \times n$ 矩陣。學生應清楚矩陣的運算：加法、減法、乘法和純量乘法及其性質。一般來說，對於矩陣 A 和 B，$AB \neq BA$，教師應予以解釋。教師應介紹以下各名詞：零矩陣、單位矩陣和倒置矩陣。
8.2 二階及三階方陣	9	教師應定義方陣和其行列式，並清楚指出奇異矩陣和非奇異矩陣的概念及應用。學生應能計算矩陣的行列式和求出非奇異矩陣的逆矩陣，並知道下列有關逆矩陣和行列式的性質： A. 逆矩陣的性質 (i) 一矩陣的逆矩陣是唯一的。 (ii) 一矩陣存在逆矩陣當且僅當它是非奇異。 (iii) 若 A 爲非奇異，則 AB =0 蘊涵 B = 0。 (iv) 若 A 爲非奇異，則 AB = AC 蘊涵 B = C。 (v) 若 A、B 爲非奇異，λ 爲非零純量及 n 爲正整數， 則 AB、A^{-1}、A^t、λA、A^n 爲非奇異及 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$， $(A^{-1})^{-1} = A$， $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$， $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$， $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$。 B. 行列式的性質 (i) 若一行列式中有兩行（或兩列）全等或成比例，則此行列式的值是零。 (ii) 若一行列式中有兩行（或兩列）互換，則此行列式的數值不變但符號改變。

38

內容	時間分配	教學建議
		(iii) 若一行列式的行換作列（或列換作行），則其值不變，即是 $\det A^t = \det A$ 或 $\lvert A^t \rvert = \lvert A \rvert$。 (iv) 若將一行列式中任何一行（或列）的每一分子乘以同一數，則其值亦乘以此一數。 (v) 兩同階方陣乘積的行列式等於該兩方陣行列式的乘積，即是 $\det AB = \det A \cdot \det B$ 或 $\lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \lvert B \rvert$。
8.3 於二維幾何的應用	8	學生應熟悉以矩陣表示一點和一向量；及反射、旋轉、放大、位移、平移及其合成的矩陣表示法。下列各例爲部分以 2×2 矩陣表示的變換： (i) 對直綫 $y = (\tan\theta)x$ 的反射，以矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 表示。 (ii) 繞原點旋轉 ϕ 角，以矩陣 $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ 表示。 (iii) 對原點以比例因子 $k \neq 0$ 放大，以矩陣 $C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 表示。 (iv) 以因數 k 平行於 x 一軸位移，以矩陣 $D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示。 對於 (iii) 及 (iv)，應討論對形狀和面積的影響。教師應對學生解釋清楚在上述各種變換下， 所有滿足 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，其中 T 代表一種變換，的每一點 P(x， y)都會轉到一新點 P′(x′，y′)。熟習各變換的合成對學生明白矩陣乘積很重要。

39

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
40		*例*： 先對直綫 y = (tanθ)x 反射跟著繞原點旋轉ϕ角的結果，正如上文所提及，可以乘積 BA 表示，其中 $BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$。留意此乘積是由右至左解釋爲：先應用變換 A 再應用變換 B。 如下的合成變換亦可提出： *例*： 以方程組 $\begin{cases}x'=y+2\\y'=-x+4\end{cases}$，其矩陣表示法爲 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$的變換。 矩陣$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$代表變換是對原點順時針方向旋轉 90°。因此，它可視爲一旋轉再跟著平移。若以（3，1）爲定點，此變換可視作爲對（3，1）順時針方向旋轉 90°。
	21	

單元 A9：二元及三元綫性方程組

特定目標：

1. 利用高斯消去法解綫性方程組。
2. 認識解的存在性及唯一性。

內容	時間分配	教學建議
41 **9.1 高斯消去法及梯陣式**	5	適合下列兩個性質的矩陣稱爲梯陣式： (1) 首 k 行非零；其餘各行爲零。 (2) 每一非零行的第一個非零元素爲 1，並出現在前一行第一個非零元素的右列。 *例*： 以下 5 × 8 矩陣是梯陣式： $\begin{pmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 學生應懂得利用高斯消去法解二元及三元的綫性方程組，方法就是利用行的基本運算將一矩陣變爲梯陣式。 *例*： 解方程組 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\3x_1+x_2-2x_3=1\\4x_1-3x_2-x_3=3\\2x_1+4x_2+2x_3=4\end{cases}$ 增廣矩陣 $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
9.2 解的存在性及唯一性	5	原方程組與下列方程組等價 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$ 由此可得 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$x_3 = 1$。 學生應知道二元或三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。 對於二元綫性方程組： $a_1x + b_1y = d_1$ $a_2x + b_2y = d_2$ (i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$，方程組有唯一解。 幾何上，方程組代表一對相交的直綫。 (ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$， 方程組無解。幾何上，方程組代表一對平行（而不重合）的直綫。 (iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$， 方程組有無窮多解。幾何上，方程組代表一對重合的直綫 教師應與學生討論一些如下列的三元方程組例子。當學生掌握了三維坐標幾何的意義後，其幾何解釋可加以討論。 (i) 在解方程組 $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 5x - 4y + 7z = 1 \\ 7x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$ 時， 明顯地第三式是多餘的。教師可與學生討論求得解 $x = \frac{29 - 3\lambda}{13}$，$y = \frac{33 + 19\lambda}{13}$，$z = \lambda$ 的方法，其中 λ 是任意數。

內容	時間分配	教學建議
	10	（ii） 解不一致方程組如 $\begin{cases} x + y + z \quad = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$。 循此路向，可以更抽象形式表示三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。

表示刪去的內容

單元 A10：複數

特定目標：

1. 學習複數的性質、幾何表達法及應用。
2. 學習棣美弗定理及其在求複數的 n 次根、解多項式方程和證三角恒等式的應用。

內容	時間分配	教學建議
10.1 複數的定義及其算術運算	3	教師應簡單介紹符號 i。數 $z = x + yi$，其中 x、y 爲實數，稱爲複數，而 x、y 分別稱爲複數的實部(Re z)和虛部(Im z)。當 $x = 0$，$y \neq 0$，$z = yi$ 稱爲純虛數；當 $y = 0$，$z = x$ 則爲實數。 教師可問學生應如何定義複數等式，但須指出複數並無次序性質。 兩個複數的和、差、積及商亦應給予定義。
44 **10.2 阿根圖、輻角和共軛**	6	學生應知道以下各項的定義：複數 z 的模 $\lvert z \rvert$、輻角 arg z、輻角的主值和它的共軛複數 $\bar{z}$ 。 複數 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的模輻形式亦可寫爲 $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ 。 學生應理解下列複數的性質： (i) $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$ (ii) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ ，其中 k 爲整數。 (iii) $\lvert \frac{z_1}{z_2} \rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$ (iv) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ ，其中 k 爲整數且 $z_2 \neq 0$ 。 教師應教授下列共軛複數的性質： 1. $\bar{\bar{z}} = z$ 2. $\bar{z} = 0 \quad \text{iff} \quad z = 0$ 3. 一個複數是自共軛當且僅當其爲實數。

內容	時間分配	教學建議
		4. $z \cdot \bar{z} = \lvert z \rvert^2$ 5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ 6. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$ 7. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$ 8. $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ ， $z_2 \neq 0$ 利用此等性質，學生不難證明： 如α是實係數多項式方程的根，則 $\bar{\alpha}$ 亦爲其根；即是若實係數多項式方程的根不是實數，則必以共軛偶(對) 形式出現。 學生應知道下列不等式： (i) $\lvert \mathrm{Re}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (ii) $\lvert \mathrm{Im}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (iii) $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$ (三角不等式) 學生亦可用類似方法證明： $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$ 和 $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_2 \rvert - \lvert z_1 \rvert$ 。 三角不等式可用數學歸納法推廣至： $\lvert z_1 + z_2 + \ldots + z_n \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert + \ldots + \lvert z_n \rvert$ 。 學生須學習複數在阿根圖的幾何表達法，並應知道實軸和虛軸。教師亦應教授複數的極形式的表達法及其幾何意義。可介紹 $\mathrm{cis}\,\theta$的另一記法 $e^{i\theta}$ 給學生，固此 $z = re^{i\theta}$ ； 此記法稱爲複數的指數形式或歐拉形式。
45 **10.3 於平面幾何的簡易應用**	5	學生應知道三角不等式的幾何意義，並須學習複數在平面幾何的多種用途，以下爲兩例： 1. 在阿根圖上，XYZ 爲等邊三角形，而其外心在原點上; 若 X 代表複數 1 + i，求 Y 和 Z 所代表的複數。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		2. 若 z_1、z_2 和 z_3 爲代表一等邊三角形頂點的三個相異複數，則 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$ 。 學生應學習在阿根圖上移動點的軌跡的例子，以下爲兩個簡單例子： 1. 求出點 z 的軌跡，使得 $\lvert z-a\rvert=k$，其中 a 是一複數和 k 爲一正常數。 2. 求出點 z 的軌跡，使得 $\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert=k$ ，其中 a、b 爲複數，k 爲不同值的正常數。,
10.4 棣美弗定理		
10.4a 有理數指數的棣美弗定理	3	學生應學習證明當 n 是正整數時，下列定理成立： $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 此處假定 $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ 。 當 n 是負整數時，可設 n = –m，m 爲一正整數，學生亦應能證明定理在 n 爲負整數時也成立。但當 $n=\frac{p}{q}$ ，其中 p、q 爲整數，$q\neq 0$，證明須待學生完成複數 n 次根的學習方可進行。
10.4b 於三角恒等式的應用	3	由棣美弗定理 $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ，其中 n 爲一正整數，可將 cos n θ 和 sin n θ. 寫成 cos θ 及 sin θ. 的乘方。 設 z = cos θ + i sin θ，則可利用 $\begin{cases} z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \\ z-\frac{1}{z}=2i\sin\theta \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta \\ z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta \end{cases}$

內容	時間分配	教學建議
10.4c 複數的 n 次根及其幾何解釋	~~5~~ 4	將 cos θ 和 sin θ 的乘方表爲倍角的正弦和餘弦。例如，學生應能將 $\cos^4\theta\sin^3\theta$ 表爲倍角的正弦的和 及 $\cos^3\theta\sin^4\theta$ 表爲倍角的餘弦的和。 學生應學習複數 n 次根的定義；並須詳細學習 1 的 n 次根(即 n 次單位根)。以下數例可供課堂討論 ： 1. 求 –1 的五次根。 2. 解方程 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 。 3. 求 1 + i 的立方根。 4. 因式分解 $z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1$ 爲實二次因式。
	~~25~~ 24	

表示刪去的內容

單元 B1：序列、級數及其極限

特定目標：

1. 學習序列和級數的概念。
2. 認識序列和級數的極限的直觀概念。
3. 認識無窮序列和無窮級數的特性。

48

內容	時間分配	教學建議
1.1 序列及級數	6	序列和級數的概念應該清楚地提出。下列的介紹方法可供參考： 若 a_n 爲對應正整數 n 可定義的函數，其數值 a_1，a_2，a_3，…a_n，…則可組合成一序列。至於該序列爲有限或無限則須視乎項數是有限或無限。再者，$a_1+a_2+...+a_n+...$ 則稱爲級數。至於該級數爲有限或無限必須視乎其所包括的數目而定。下列爲常用記法： $S_n=\sum_{r=1}^{n}a_r$ 或 $\sum_{1}^{n}a_r$ 有關序列和級數的簡易運算及法則應予介紹。爲方便起見，序列 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3…可用$\{a_i\}$和$\{b_i\}$表示，則 (i) $\{a_i\}\pm\{b_i\}=\{a_i\pm b_i\}$ (ii) $\lambda\{a_i\}=\{\lambda a_i\}$ 亦即，可涉及項與項之間的運算概念。 對級數求和法，可參考下列方法： (1) 數學歸納法：本課程中單元 A3 已有提及。 (2) 求差方法：教師應強調級數中第 r 項可寫爲 f(r + 1)及 f(r)之差，其中 f(x)爲 x 的函數。即 若 $a_r = f(r+1)-f(r)$ 則 $\sum_{1}^{n}a_r=\sum_{1}^{n}[f(r+1)-f(r)]$ $= f(n+1) - f(1)$ $\sum_{1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 及 $\sum_{1}^{n}r(r+1)$ 就是其中一些典型例子。

49

內容	時間分配	教學建議
1.2 序列及級數的極限	7	若級數的項是可以用下列遞推關係表達的話： $a_r-a_{r-1}=f(r)$ 或 $a_r=Aa_{r-1}+Ba_{r-2}$ 以下是找出 a_r 的解的方法：（特別適用於後者） 設α、β爲輔助方程 $\lambda^2=A\lambda+B$ 的根， (i) 若$\alpha\neq\beta$，則 $a_r=k_1\alpha^r+k_2\beta^r$ (ii) 若$\alpha=\beta$，則 $a_r=(k_1+rk_2)\alpha^r$ 其中 k_1 和 k_2 爲待定常數。 序列的極限概念應以直觀方式教授，下列方式可作參考： 設 a_1，a_2，…，a_n，…爲一序列，對一任意大的數值 n，則 a_n與一常數 ℓ 的差爲一任意小的正數，我們亦可以寫爲 當 $n\to\infty$ 時 $a_n\to\ell$，或 $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$。 教師應同時強調下列各點： (i) ℓ 稱爲該序列的極限。 (ii) 若極限 ℓ 是存在的話，則必是唯一的極限。 (iii) 該序列在 ℓ 收斂，或該收斂序列的極限爲 ℓ。 (iv) 若一序列並不收斂於任何極限，則稱爲發散序列。 並應提供充足的收斂和發散序列的例子以作說明。此等例子如下： (1) $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，其中 a > 0。 (2) 序列 $a_n=\frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{n}$ 收斂於極限 0。 (3) 發散序列 $a_n=\{1+(-1)^n\}\sqrt{n}$。 (4) 振動發散序列 $a_n=(-1)^n(1+\frac{1}{n})$。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		注意：序列可分爲收斂，發散(至 $+\infty$ 或 $-\infty$)或振動（並不收斂或發散至 $+\infty$ 或 $-\infty$ ）不同類別。 收斂序列的一般性質亦應與學生討論： 設 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 和 b_1，b_2，b_3，…，b_n，…爲收斂序列，其極限分別爲 a 和 b，則下列序列亦具收斂性質。 (i) λa_1，λa_2，λa_3，…. 收斂於 λa，其中 λ 爲一常數。 (ii) a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，… 收斂於 $a+b$ 。 (iii) a_1b_1，a_2b_2，a_3b_3，…收斂於 ab。 (iv) $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，…收斂 $\frac{a}{b}$，假若 $b \neq 0$。 最後學生應在老師指導下認識到下列因果關係： (i) 設收斂序列 a_1，a_2，a_3，…的極限爲 a， 則 $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ，其中 k 爲一正整數。 (ii) 設 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3，…爲兩收斂序列，其極限同爲 ℓ；而若另一序列 c_1，c_2，c_3，…，其中當 $i>k$，k 爲一正整數，$a_i \le c_i \le b_i$，則 c_1，c_2，c_3，…亦爲收斂，而且其極限亦是 ℓ。該性質通常稱爲迫近定理，教師可將單調序列和有界序列加以介紹，以便擴闊學生對序列的認識。 至於無窮級數方面，教師可用類似如下的處理方法： (1) 收斂概念 若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} u_i = S$ 存在，則級數 $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$爲收斂，並且可稱 S 爲級數的總和。若用 S 表示 $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$，則其結果可寫成爲： 當 $n \to \infty$ 時，$S_n \to S$ 或 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$ 通常稱爲第 n 個的部份和）在類似情況下，教師可選擇引入發散和振動的概念。

內容	時間分配	教學建議
		(2) 收斂級數的性質 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$的極限爲 S 和 $v_1+v_2+v_3+\ldots$的極限爲 S' 則 (a) $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3+\ldots$收斂於 λS， λ 爲一常數； (b) $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots\ldots$收斂於 $S+S'$； (c) 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$收斂，則 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 。
1.3 序列及級數的收斂性	5	介紹收斂序列的特性，如 (i) 收斂序列爲有界 (ii) 單調而有界的序列爲收斂 此外，一些典型的收斂序列和發散序列亦應加以討論，並以下列之實例說明計算序列極限的方法。 (A) 收斂序列 (i) $a_n = x^n$ ，設 $\lvert x \rvert < 1$ (ii) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (iii) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (B) 收斂級數 (i) $r + r^2 + r^3 + \ldots$ ，設 $\lvert r \rvert < 1$ (ii) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ (iii) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ (iv) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(C) 發散級數 (i) $\Sigma \frac{1}{n}$ (ii) $\Sigma (1-\frac{1}{n})^n$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ 此方法應包括迫近定理的典型應用例題，但毋須對收斂性的測試再作深究。
	18	

52

單元 B2：極限、連續性及可微性

特定目標：

1. 理解函數的極限的直觀概念。
2. 理解函數的連續性及可微性的直觀概念。
3. 認識極限作爲微積分的基本概念。

內容	時間分配	教學建議
2.1 函數的極限	5	函數的極限應以直觀方式介紹。其實，在 $x=a$ 時，函數 $y=f(x)$的極限概念應與序列的極限概念連繫起來。當自變量經過一收斂序列$\{x_n\}$(橫坐標序列)，其極限爲 a 時，則可考慮其直坐標序列$\{f(x_n)\}$。故此當$\{x_n\}$趨近 a 時，則 $\{f(x_n)\}$ 趨近一有限值 ℓ 之情況，應可清楚而明確地表達，即是 若 $x \to a$ 則 $f(x) \to \ell$ 或 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ 部份教師可能會將重點放在當 x 與 a 爲相當接近時，則 f(x)與 ℓ 之間的差異可以任意的小的概念上，從而強化當 $x \to a$ 時， $f(x) \to \ell$ 的理解。 但必須向學生指出，函數值 f(a) 的存在，並不能引申爲極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的存在及等於 f(a)，縱使在一般情況下可成立。教師可參考下列例子： $f(x) = \begin{cases} 1 & 當\ x \neq 0 \\ 0 & 當\ x = 0 \end{cases}$ 這裏 $f(0) = 0$ 和 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ 自變量趨近極限 a 的途徑應加以注意：當 x 的值是由左至右增加時，函數的極限稱爲左方極限，以 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 表示；當 x 的值是由右至左遞減時，極限稱爲右方極限，以 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 表示。 由此，教師不難引導學生理解當 $x \to a$ 時，函數 f(x)的極限存在當且僅當其左方極限和右方極限相等。至於對極限作更廣泛理解，教師應討論 $x \to \infty$ 的情況，使學生再一次明白當 x 趨於一足夠大的數時，f(x)與 ℓ 的的差異可任意的小，並表爲 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ 。

53

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		下列函數的極限性質應包括在討論範圍內： (i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)]=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ，k 與 x 無關 (iii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ ，其中 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ (v) 若 $f(x)\le h(x)\le g(x)$ 在 x 接近 a 時成立，而且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\ell$ 。 一些重要的極根，如下列者，應予以介紹： (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ell n\,a$ ；$a>0$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=1$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ell n\,x}{x-1}=1$ 教師應給予學生足夠的計算函數極限的練習以便強化他們在這方面的訓練。

54

內容	時間分配	教學建議
2.2 函數的連續性	4	函數的連續性的定義是應以函數的極限作爲基礎，以及用直觀的方法加以解釋，不宜涉及$\varepsilon-\delta$ 的概念。教師可參考下列建議： 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在兼且等於 f(a)，則函數 f(a)在 x = a 連續。 若函數在某區間內的每一點連續，則函數在該區間內連續。 在引入函數於一點的不連續性前，應討論一些常見的函數，例如： (i) $f(x)=x^2$ 在任何區間內皆連續。 (ii) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 並非在整個區間 $0\le x\le 5$ 內連續。 上述概念並不需要作嚴謹的處理，但教師宜提供廣泛而合適的例子，以便加強學生在這方面的認識，並理解若兩函數在 x = a 連續，則它們的和、差及乘積在該點亦爲連續，而當分母不等於零時，它們的商亦爲連續。教師應引用一些在整段實數綫上皆爲連續的例子，以啓發學生進一步的認識： (i) 多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ (ii) 指數函數 $f(x)=a^x$ ；$a>0$ (iii) 對數函數 $f(x)=\log_a x$ ；$a>0$， $a\neq 1$ (iv) 三角函數，例如 $\sin x$ 、$\cos x$ 對於合成函數的連續性，教師可採納下列方式： 設 y = f[g(x)] 爲一合成函數，其內函數 g(x) 在 x = a 連續，其外函數 y = f(t)在 t = g(a)亦爲連續，則合成函數 y = f[g(x)]在 x = a 連續。 教師可強調每一連續函數的連續函數亦爲連續。 教師應指出在一區間內的連續函數擁有一系列值得注意的性質，並加以討論，但不宜作嚴謹的證明。這些性質包括： (i) 若函數 f(x)在閉區間 [a，b]內連續，其中 f(a)= A 和 f(b) = B，$A\neq B$，則 f(x)在 A 與 B 之間的每一數值取值一次或以上。(介值定理) (ii) 閉區間上的連續函數必爲有界。

55

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(iii) 閉區間上的連續函數必有其極大和極小值。 (性質 (ii) 和 (iii) 稱爲魏爾斯脫拉斯定理)
2.3 函數的可微性	4	函數 f(x) 在 x = a 的可微性定義如下： 函數 f(x) 在 x = a 上可微當且僅當極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。 教師應同時指出若一函數在某點可微， 則函數在該點連續，而連續性祇是可微性的必要條件而並非充分條件。並且，函數在 x = a 的導數定義就是上述極限的值。學生可透過上述學習理解可微性的概念。函數 f(x) 在 x = a 的導數可表爲 $f'(a)$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)\Big\|_{x=a}$ 或 $\frac{dy}{dx}\Big\|_{x=a}$ 教師應提及若函數在一區間內每一點皆可微，則該函數在該區間內可微，兼且在區間內的每一 x 值，皆對應於函數在該點的導數 f'(x)，因此 f'(x)亦爲 x 的函數，稱爲 f(x)的導函數。 在這階段，教師應預備充足例題以便學生能掌握微分法的概念和技巧，至於從基本原理求取一些典型函數的導數，尤爲重要。故此，足夠的練習是不可缺少的。下列例子可作參教考： (1) 利用第一求導法則，找出下列函數於各點的導數： (i) x^2 於 x = 1 (ii) e^x 於 x = 0 (iii) sinx 於 $x=\frac{\pi}{4}$ (2) 利用第一求導法則，求下列函數的導數： (i) $f(x) = x^n$ 其中 n 爲一正整數 (ii) $f(x) = e^x$
	13	

56

單元 B3：微分法

特定目標：

1. 掌握微分法的不同技巧。
2. 學習及掌握求高階導數的技巧。
3. 理解洛爾定理及中值定理的直觀概念。

內容	時間分配	教學建議
3.1 微分法的基本法則	4	作爲延續，教師應講解以下法則： (1) $\frac{d}{dx}(k)=0$ ，其中 k 爲常數 (2) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$ ，r 爲實數 (3) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ (4) $\frac{d}{dx}[kf(x)]=k\frac{d}{dx}f(x)$ ，其中 k 爲常數 (5) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ (積法則) (6) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$ ， $g(x)\neq 0$ (商法則) 教師可提供以上法則的証明，藉以加強學生在概念上及技巧上的掌握。從(3)至(6)，要強調 f(x)及 g(x)的導數的存在。關於(2)，對 r 爲整數的証明已足夠，對 r 爲實數的証明可留待至學生已學習鏈式法則及對數微分法。教師應列舉一些常見的函數以示範使用以上法則求導數。
3.2 三角函數的微分法	2	教師應講解以下函數的微分法 ： 1. sin x 2. cos x

57

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		3. $\tan x$ 4. $\operatorname{cosec} x$ 5. $\sec x$ 6. $\cot x$ 教師可鼓勵學生作出以上的証明，並提示學生(4)至(6)的証明可使用商法則。
3.3 複合函數及逆函數的微分法	4	複合函數 $y = f[g(x)]$ 的導數可透過鏈式法則 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ 或 $= f'(t)g'(x)$ ，其中 $t = g(x)$ ，求得。 $y = f(x)$ 的逆函數 $x = f^{-1}(y)$ 的導數，可利用 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 求得。 教師可用以下例子作示範 ： $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$ 、 $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$ 、 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ 及 $\frac{d}{dx}(x^{-n})$ 、 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})$ ，其中 n 爲正整數。
3.4 隱函數的微分法	2	隱函數 $F(x，y) = 0$ 的微分法，可利用上述各法則，對於自變數 x，求方程各項的導數。教師應給予示例，加強與學生的討論，下列是一些建議： (i) 若 $x \cos y^3 + y \sin 2x = 1$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。 (ii) 已知 $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$ ，求在點(2，5) 的導數 $\frac{dy}{dx}$ 。 (iii) 對 $\cos(x^2 - y^2) = xy$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

內容	時間分配	教學建議
3.5 參數方程的微分法	2	對於用參數方程 $x = u(t)$，$y = v(t)$ 表達的函數 $y = f(x)$，y 可被表爲對 t 的複合函數 $y = f(u(t))$。透過鏈式法則，可得出 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ ，故此 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 或 $f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}$ 。學生需明白在求導時。$u(t)$ 及 $v(t)$必須爲可微的及 $u'(t) \neq 0$。 教師可示範以下求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子： (i) 橢圓 $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ (ii) 旋輪綫 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$
3.6 對數函數及指數函數的微分法	6	教學範圍包括以下法則，教師可使用建議的方法提供證明： 1. $\frac{d}{dx}(\ell n\, x) = \frac{1}{x}$ (用 $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) 2. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ (用 $\frac{d}{dx}\ell n\, y = \frac{1}{y}$ 及鏈式法則，其中 $y = e^x$ 或應用逆函數的求導法則) 3. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\, \ell n\, a}$ 4. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\, \ell n\, a$ 教師應提供如下列的例子： e^{x^3} 及 $\log_a \sqrt{x^2+1}$ 。 (注意：爲求完整起見，教師可與學生討論，對n爲有理數及實數，公式 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ 的證明。) 教師應強調一些應用對數微分法的例子，例如：

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		當 y 爲 x 的複雜的函數，尤其當 y 涉及變數指數，導數 $\frac{dy}{dx}$ 可從對數微分法求得。下列是一些常見的例子： $y = x^x$ 及 $y = \frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x+d)}$ 。
3.7 高階導數及萊布尼茲定理	5	教師應引入高階導數的定義及符號 $f''(x)$、$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的意義。此外，學生亦應能求以參數方程表達的函數的高階導數和應用萊布尼茲定理 $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} C_r^n\, u^{(n)}\, v^{(n-r)}$ 。學生可嘗試以數學歸納法證明此定理。教師應示範以萊布尼茲定理求涉及函數的高階導數的方程，尤其涉及隱函數，下列是一些例子： 1. 求 $\cos^2 x \sin x$ 和 $x^3 \cos x$ 的 n 階導數。 2. 設 $f(x) = \tan^{-1} x$ 。證明 $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ 及求對 $x = 0$ ，f(x)的n階導數。 3. 已知 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ 。 證明 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{若 n 爲偶數} \\ -n! & \text{若 n 爲奇數} \end{cases}$ ， 其中 n 爲整數及 $n \geq 3$ 。
3.8 洛爾定理及中值定理	3	教師應講解洛爾定理和中值定理的直觀概念及其幾何意義。對於能力較高的學生，則可提供定理的證明。學生應學習簡單及直接應用定理的題目。可考慮下列問題 ： 1. 若對所有在某區間內的x值， $f'(x) = 0$ ，則f(x)在該區間內爲一常數。 2. 若對所有在某區間內的x值， $f'(x) = g'(x)$ ，則f(x)與g(x)在該區間內的差爲一常數。

內容	時間分配	教學建議
		3. 證明若 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ ，則方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 在 0 與 1 之間有至少一個根。
	28	

表示刪去的內容

單元 B4：微分法的應用

特定目標：

1. 學習和使用洛必達法則。
2. 學習微分法的應用。

內容	時間分配	教學建議
4.1 洛必達法則	4	引入以下待定型的極限： $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$， 0^0，∞^0，1^∞。 首先宜展示上述形式出現的例子。教師應講解洛必達法則 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 以處理 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型的極限。以下例題可作考慮： 1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos^2\pi x}{e^{2x}-2ex}$ 2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\ell n\sin(x-a)}{\ell n\tan(x-a)}$ 教師應強調必須先簡化 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 然後才計算極限，而此過程可不斷重覆直至 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ 已定型。至於其他待定型的極限，可引入例題以展示該等極限可轉化爲待定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的樣子，使可應用洛必達法則。以下例題可作考慮： 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

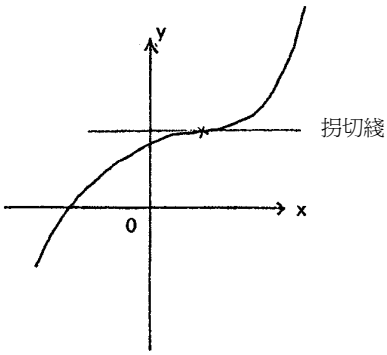
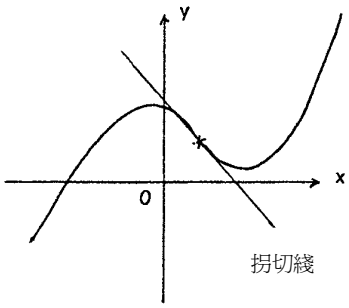
62

內容	時間分配	教學建議
		3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 而洛必達法則的證明則不包括在內。
4.2 變率	3	藉着一些常用的量，如速度和加速度等，引入並詳細討論 $\frac{dy}{dx}$ 作爲 y 對於 x 的變率。 可考慮以下例題： 1. 一雪球溶化時，其體積以恒速度x cm^3/s.減少。當其半徑爲a cm時。求其 (a) 半徑的變率； (b) 表面面積的變率。 2. 一移動中的質點與一定點在時間 t的位移 x 爲 x = a sin t + b cos t 。 (a) 求該質點在時間 t 的速度和加速度，並描述其運動。 (b) 證明在時間 t，其速度可表明爲 $\sqrt{a^2+b^2-x^2}$ 。
4.3 單調函數	2	作爲開始，教師可引述以下直觀且顯而易見的結果： 若 $f'(a)>0$ ，則對所有小過但充份接近 a 的 x 值 f(x) < f(a)，及對所有大過但充份接近 a 的 x 值 f(x) > f(a)。 從幾何的角度看，以上結果可引伸至此語句 ： 當 x = a 時 f(x)是嚴格地遞增。(注意：討論中的函數是連續和可導的。)相似的描述亦可用於當 x = a 時，f (x)是嚴格地遞減的。由此，單調遞增的概念可被表達如下： 若對所有在該區間的 x 值 $f'(x)>0$ ，則 f(x)在該區間內爲一單調遞增的函數。 教師應引導學生得出以下重要結果： 若在區間 (a，b)內，$f'(x)>0$、函數 f(x)在 x = a連續及 f (a) ≥ 0，則 f(x)在該區間內便爲正數。 單調遞減函數的處理亦可用相同方法處理，學生可提供類似的描述。 以上結果在證明一些如下的不等式時有着重要的相關性：

63

表示刪去的內容

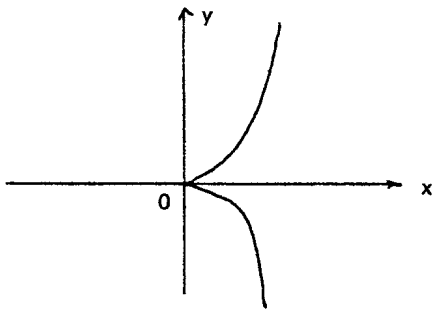
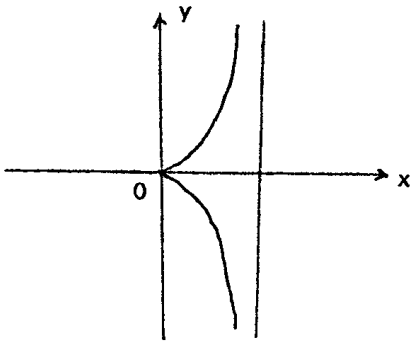
內容	時間分配	教學建議
		(i) $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x$ ，對 $0<\alpha<1$及 $x \ge -1$ (ii) $(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x$ ，對 $\alpha<0$或 $\alpha>1$及 $x \ge -1$ (iii) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ ，對 $x>0$
4.4 極大和極小	5	藉着引入曲綫的斜度的定義，教師應解釋及強調導數作爲曲綫的斜度的幾何含意。關於此點，教師可一再加強學生對曲綫的遞增或遞減的圖像理解。 當學生已熟習以上知識後，教師可引導學生掌握辨認局部極大點及局部極小點(即曲綫的轉向點)的能力。學生要學習以下關於判斷局部極值的情況： 對函數f(x)， (a) 求 a 致使 $f'(a)=0$ 及 (b) 檢查 $f''(a)=0$ 的符號或檢查在 a的鄰域中 $f'(x)$ 的符號改變。 教師應提醒學生以下事項： (i) 局部或相對極值未必爲全局或絕對極值； (ii) 轉向點可於導數不存在的地方出現，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 及 $y=\|x\|$； (iii) 平穩點的導數爲零； (iv) $f'(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出局部極值，如 $x^3\sin\frac{1}{x}$ 及 x^3 。 教師應討論及示範與以上技巧有關的例題。接鬟可討論拐點，常用的方法如下: (a) 求 a 致使 $f''(a)=0$ (b) 檢查在 a 的鄰域中 $f''(x)$ 的符號改變。 教師應提醒學生以下事項： (i) 於拐點，其導數未必相等於零； (ii) $f''(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出拐點，如 x^4 。 因此，一些能展示不同方向的拐切綫的圖像會有很大的幫助。

內容	時間分配	教學建議
		  最後，對於當函數的定義域擴大或縮小時與其絕對值的關係，教師可加以簡單解釋。
4.5 曲綫描繪	6	本課題開始前，學生先要學習求出曲綫上存在鬟的垂直、水平及斜漸近綫。講解時，教師宜運用例題以作解釋。例如：曲綫 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 。 學生應明白到垂直漸近綫可於不連續點出現，然後再學習當 x 趨向無限大時函數的表現，例如 $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\to x$ 當 x 爲充份地大，所以可理解到 $y=x$ 爲一漸近綫。 在完成本課題時，教師應幫助學生尋找、選取及組織所有有關的資料，以便能有系統地描繪曲綫。以下事項值得注意：

表示刪去的內容

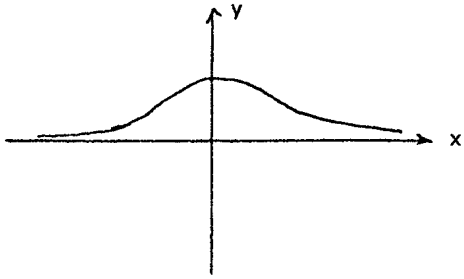
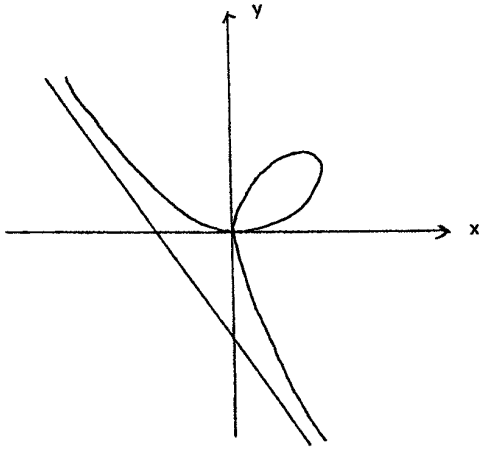
內容	時間分配	教學建議
		(1) 對稱於兩軸 ： 檢查方程以探查對稱性 (a) 如無y的奇數冪出現，曲綫則對稱於 x 軸 ； (b) 如無x的奇數冪出現，曲綫則對稱於 y 軸 ； 例如： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是對稱於兩軸。 (2) x 及 y 的值域的限制 例如：(a) 對 $y^2=4x$ ，x必爲非負數，而y則可取所有值。 (b) 對 $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$ ，可寫成 $y^2=\frac{a^2x^2}{x^2+a^2}$ ，所以x可取所有值；但當寫成 $x^2=\frac{a^2y^2}{x^2-y^2}$ ，明顯地 $\lvert y\rvert<a$。事實上，此曲綫是包含在漸近綫 $y=\pm a$ 內。 (3) 與兩軸的截距或任何在曲綫上容易見到的點。 例如：對 $y=\frac{x(x+2)}{x-2}$ ，曲綫的 x 截距爲 -2 及 0；而曲綫僅與 y 軸相交於原點。 (4) 極大、極小及拐點。 (5) 曲綫的漸近綫。 爲了全面的學習這課題，教師在例題中要多提點學生須注意的地方。對於三角函數，學生要注意曲綫的週期。至於用參數方程表達的曲綫則沒有特定要注意的法則，較好的方法就是儘量求得相對的笛卡兒方程然後描繪。 教師應描繪一些能示範以上步驟常見的例子給學生參考。以下例子可作考慮：

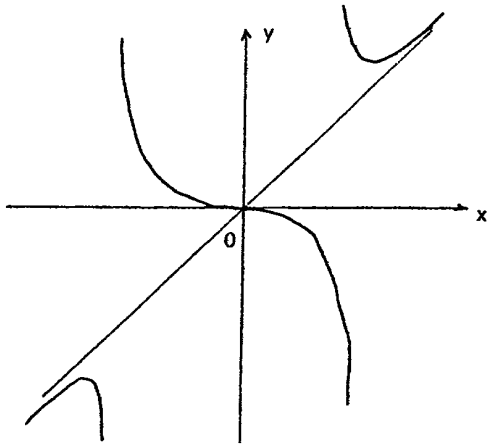
66

內容	時間分配	教學建議
		1. $y^2=ax^3$  2. $y^2(a-x)=x^3$ 

67

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
89		3. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$  4. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ 

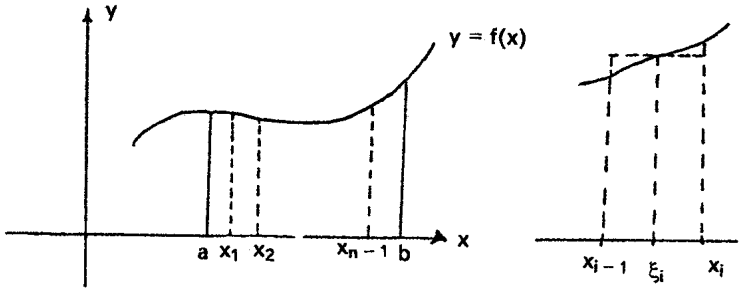
內容	時間分配	教學建議
69	20	5. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ 

表示刪去的內容

單元B5：積分法

特定目標：

(1) 理解積分作爲極限和的概念。
(2) 學習有關積分的性質。
(3) 理解積分基本定理。
(4) 運用積分基本定理於積分的求值。
(5) 學習一些求積分的方法。
(6) 掌握廣義積分的基本概念。

內容	時間分配	教學建議
5.1 黎曼積分的定義	5	有關定積分的理論可由兩相異的途徑表達：其一爲透過幾何直觀的進路，此外亦可採用純分析的進路，前者需倚賴幾何的面積概念，而後者則引用定積分作爲一代數和的極限的概念而無需引用幾何概念。教師宜按學生所需決定其取向及施教次序。以下乃一簡化的說法以供參考： 在區間 [a，b] 內，設 $f(x) \geq 0$ 及其圖像爲有限和連續。  用點 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ 將[a, b]分成 n 個子區間其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$，同時設 $x_i - x_{i-1}$ 記爲 Δx_i 及 ξ_i 爲在$[x_{i-1}, x_i]$內任一點。由曲綫 y = f(x)、直綫 x = a 及 x = b

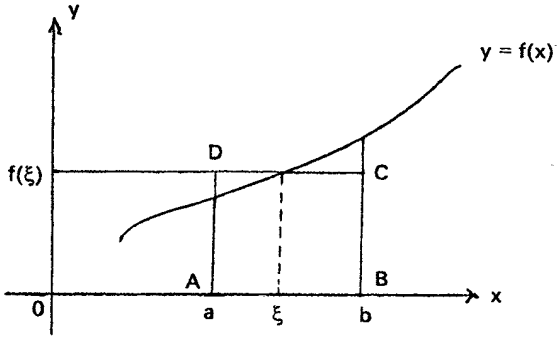
內容	時間分配	教學建議
		和 x－軸所包圍的區域的面積約爲總和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 。此外，當 n 增加而 $\max(\Delta x_i) \to 0$，可求此面積的值而此總和的極限則定義爲 f(x) 由 x = a 到 x = b 的定積分並記爲 $\int_a^b f(x)\,dx$ ，即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 其中記號 f(x) 稱爲被積函數； a 稱爲下限； b 稱爲上限而此總和則稱爲黎曼和。 教師和學生討論時，應強調下列各點： (1) [a，b] 是任意分割成子區間的; (2) $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$是任意的； (3) 將定積分定義爲總和的極限已先假設a < b。當 a > b 其值定義爲 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 而當 a = b 時，$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (注：若定積分是利用函數F(x)作定義的，則這些結果可 視爲定理；則 F(b) – F(a) = –[F(a) – F(b)] 及 F(a) – F(b) = 0 教師應示範例題並加以說明以幫助學生充分明白。以下的例題可作參考。 *例一* $\int_a^b e^x\,dx$ 若使用相等的區間 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$ (設)，則 $x_0 = a$ ， $x_1 = a + h$ ， …，$x_{i-1} = a + (i-1)h$。設 ξ_i 爲 x_{i-1} ，即 $\xi_i = a + (i-1)h$。 由於 $\max \Delta x_i = \Delta x_i = h$ ，

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		$\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i} h = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)h} h = \lim_{h\to 0} he^a \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)h}$ $= \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{nh}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{b-a}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} h\frac{(e^b-e^a)}{(e^h-1)}$ $= (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{(e^h-1)} = (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = e^b-e^a$ *例二* $\int_a^b x^m dx$ ，$m\neq -1$ 考慮n個區間其中 $x_0=a$ ，$x_1=ar$ ，…，$x_i=ar^i$ ，$x_n=ar^n=b$ 。當 $n\to\infty$ ，$b=ar^n$ $\Leftrightarrow r=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ 因此 $r\to 1$ ，同時 $\max\Delta x_i=\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=ar^n-ar^{n-1}=ar^n(1-r^{-1})=b(1-r^{-1})\to 0$ 。 設 $\xi_i=x_{i-1}=ar^{i-1}$ $\int_a^b x^m dx = \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n}(ar^{i-1})^m(ar^i-ar^{i-1})$ $= \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n} a^{m+1}r^{(m+1)(i-1)}(r-1)$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)\cdot\frac{r^{(m+1)\ n}-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r^{(m+1)n-1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1}(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m}$

內容	時間分配	教學建議
		$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ 其後，教師仍須詳述下列各點： (1) 若f(x)在[a，b]是連續的，則f(x)在[a，b] 爲可積的; (2) 若f(x)在[a，b]是有界的和單調的，則f(x)在 [a，b]是可積的。
5.2 定積分的簡單性質	4	教師可幫助學生從定義推導下列結果： (1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ ，其中k爲常數。 (2) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$ 。 (3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ 而c是在區間 [a，b] 內或外任一點。 (4) 若在[a，b]，對應於所有x的值，f(x) ≥ g(x)，則 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ 。 (5) 若在[a，b]，對應於所有x的值，$\lvert f(x)\rvert \leq \phi(x)$ ， 則 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \phi(x)\,dx$ 。 其中的特例有 (a) 若 $\phi(x)=\lvert f(x)\rvert$ ，則 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ 。 (b) 若 $\phi(x)=M$ ，而M 爲常數，則 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq M(b-a)$ 。 可和學生討論一些簡單而直接的應用如下： (1) 若對x > 0 ，f(x) 是正的和單調遞增的，試證明 $f(n-1)\leq\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n)$ 。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
5.3 積分中值定理	2	(2) $\left\lvert \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx \right\rvert \le \frac{\pi}{4n}$ 。 此定理宜以一簡化的形式表達，即如： 若 f(x) 在 [a, b] 是連續的，則在(a，b)中存在一數 ξ，而且 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$ 從附圖中可容易看出要傳達的概念。學生應不難明白 f(ξ)(b–a)原來的意義就是矩形 ABCD 的面積。  如果想要一較形式化的證明，則可以用 5.2 所提及的性質和連續函數的性質，而其中特別可用介值定理。

內容	時間分配	教學建議
5.4 積分基本定理及其於計算積分的應用	4	積分的第一基本定理如下： 設 f(x) 在 [a，b] 是連續的及 設 F(x) 的定義爲 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ，其中 $a \le x \le b$ ， 則 (i) F(x) 在 [a，b] 是連續的 (ii) F(x) 在 (a，b) 是可微的和 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 。 亦可以簡化的形式如下 ： 若 f (x) 是連續的，則函數 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 是可微的且其導數相等於被積函數當在積分上限時的數值，即 F′(x) = f(x)。 教師應和學生詳細討論而學生可在教師指導之下引用積分的中值定理來證明此定理。 (註：教師應在教授此定理之後立即詳述下列各點： (1) 若一函數 F(x)的導數與被積函數 f(x)是相等的，則 F(x)被稱爲 f(x)的原函數。 (2) 若同一被積函數的兩個原函數爲 F(x) 和 G(x)，則 F(x) – G(x) 的導數是恒等於零的，因此 F(x) – G(x)是常數。) 至於積分的第二基本定理，教師亦可以同樣手法幫助學生導出。可考慮下列的方式： 設 f(x) 和 F(x)在[a，b]是連續的； 若對於 $a < x < b$，$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ，則對於 $a < x \le b$ $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ ，而其中 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		教師應示範一些有啓發性的例題以增強學生對上述定理的全面理解。在計算定積分時一方面將其視爲一無限的總和而另一方面可求有關的原函數作爲另一方法。由此可以提高學生對利用微分的逆運算來計算積分的認識。 教師可先用簡單的例題如 $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ 而最後用其他有趣的應用題如下： (1) 若考慮 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在區間 [1，2]，則可以建立以下的結果 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ell n\,2$ 當 $n \to \infty$， (2) 若考慮 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 (0，1)，則可以證明當 $n \to \infty$ 時，$n\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$ 。
5.5 不定積分法	6	作爲上述的延續，學生應將注意力集中在求原函數的機械程式作爲計算定積分的另一方法。代表 f(x)的不定積分的記號 $\int f(x)\,dx$ 應介紹如下： 若 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 成立，則稱F(x)爲f(x)的不定積分，且記爲 $F(x) = \int f(x)\,dx$ 。 教師亦應指出 f(x)的不定積分不是唯一的及若 F(x)是 f(x)的一個不定積分，則 F(x)+c (其中 c 是一常數)是另一個，而以 $\int f(x)\,dx$ 作爲 f(x)的原函數。 學生應能夠運用下列公式求不定積分，事實上，教師可鼓勵學生導出部分或全部公式。 (1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ，$n \neq -1$

內容	時間分配	教學建議
		(2) $\int \frac{dx}{x} = \ell n(x) + c$ (3) $\int e^x\,dx = e^x + c$ (4) $\int a^x\,dx = a^x \ell n a + c$ (5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ (6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ (7) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$ (8) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ (9) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$ (10) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$ (11) $\int \tan x\,dx = \ell n\lvert\sec x\rvert + c$ (12) $\int \cot x\,dx = \ell n\lvert\sin x\rvert + c$ (13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$ (14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

表示刪去的內容

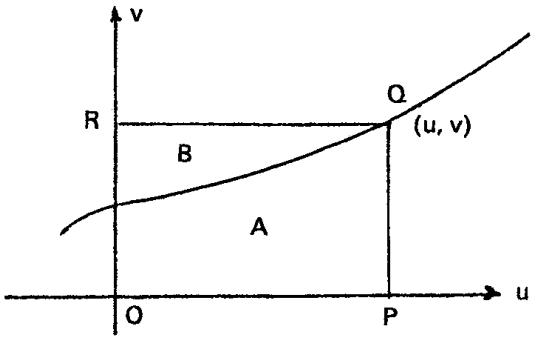
內容	時間分配	教學建議
5.6 求積分的方法 (A) 代換法	8	教師亦可提醒學生以下性質： (1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ ，其中k是一常數 (2) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ 應鼓勵學生對各樣的不定積分做足夠的練習。因此可測試他們已掌握了基本運算，而可以順利學習其後的技巧。 教授代換法時，對代換公式 $\int f(u)\,du = \int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$ 無需作嚴謹的證明，但教師宜開始時先用簡單和明顯的例子如下： $\int \frac{dx}{x+1}$ 、 $\int (x+1)^{10}\,dx$ 、 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 、 $\int \sin^5 x\cos x\,dx$ 、 $\int \frac{dx}{x\,\ell n\,x}$ 等。 在某些積分中，當g′(x) 並不明顯時，g(x)是要推測出來的，例如 $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$ 、 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 等。 學生須透過大量有關的練習以發展這些技巧，以下是一些例子 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$ (2) $\int \frac{dx}{\cot x + \operatorname{cosec} x}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (設 $u = e^x$) (4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (設 $u = e^x+1$)

78

內容	時間分配	教學建議
		(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 其中$b > a$（設 $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$） (6) $\int_0^1 \frac{\ell n\,(1+x)}{1+x^2}\,dx$ (設 $x = \tan\theta$) 教師亦應和學生討論下列有用的結果，並舉實例說明： (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ 而其中 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (2) 若 $f(x) = f(a-x)$ ，則 $\int_0^a xf(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ 而其中 $\int_0^\pi xf\,(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ (3) 若f(x) 是一週期w的週期函數，則 $\int_a^{a+w} f(x)\,dx = \int_0^w f(x)\,dx$ (4) 若f(x) 是一偶函數，則 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (5) 若f(x) 是一奇函數，則 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ 可考慮下列有關的例題： (1) $\int_0^\pi \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

79

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(2) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (3) 證明 $\int_0^a x^m(a-x)^n dx = \int_0^a x^n(a-x)^m dx$ 並由此計算 $\int_0^8 x^2\sqrt[3]{8-x}\,dx$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$ (5) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ 並由此計算此積分。 (6) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$
80 (B) 分部積分法	3	分部積分的公式 $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$ 或 $\int udv = uv - \int vdu$ 可利用直觀幾何的方法來證明。 

內容	時間分配	教學建議
		圖中提供上述公式一個非形式化的幾何解釋： $\int vdu$ 代表區域 A 的面積； $\int udv$ 代表區域 B 的面積； uv 代表 OPQR 的面積而由此可得出上述公式。 應用具代表性的例題作說明時可包括 $\int xe^x dx$ 、$\int x\sin x dx$ 和 $\int \ell n\, x dx$ 。 學生混合使用代換法和分部積分的公式，就可以處理很多種類的積分，例如： (1) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$ (2) $\int \tan^{-1}x\, \ell n\,(1+x^2)\, dx$ (3) $\int (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\, \ell n\, x\, dx$ (4) $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ (5) $\int_0^1 x\tan^{-1} x\, dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x\sin x\, dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$
81		

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
(C) 歸約公式	5	歸約公式是用一組函數中較簡單的函數的積分來表達函數組中任一函數的積分。歸約公式通常是利用分部積分的方法求得。在三角函數的積分中此法被廣泛利用。可考慮下列具代表性的例題： (1) 設 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ 可記爲 I_n，證明 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$，$n \geq 2$。由此計算 I_4 的值。 (2) 設 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，求 I_n 的歸約公式，然後計算 $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ 的值。 (3) 若 $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$，證明對 $n > 2$，$I_n = \frac{1}{2}x^{n-1}e^{x^2} - \frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}$。
(D) 利用部分分數計算積分	4	有理代數函數的積分是可先將數式分解成部分分數後完成，一般有四類分式： $\int \frac{Ldx}{ax+b}$、$\int \frac{Ldx}{(ax+b)^r}$、$\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)}dx$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)^r}dx$。 學生處理前三類的分式應沒有特別的困難，但若遇到最後那類分式時，則須要應用歸約公式了。 以下是一些可作討論的例題： (1) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\,dx$ (2) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ (3) 設 $I_n = \int \frac{dx}{(1-x^4)^n}$，證明當 $n \geq 1$，$4nI_{n+1} = (4n-1)I_n + \frac{x}{(1-x^4)^n}$ 並求 $\int \frac{x^8}{(1-x^4)^4}dx$ 的值。

82

內容	時間分配	教學建議
5.7 廣義積分	4	應介紹廣義積分的基本概念而學生預期可認識第一類廣義積分，即 $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 或 $2\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 並可簡單記爲 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 或 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 及第二類廣義積分，即 當 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)\,dx$ 和 當 $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_a^{b-h} f(x)dx$ 屬於第一類而具代表性的例子有： (1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ (2) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$ 教師宜提出 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ 作例題，但指明這不是一廣義積分因其極限並不存在。 第二類廣義積分的例題有 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 和 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$。 同樣地，教師可用 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 作說明，這亦不是一廣義積分因其極限亦不存在。
	~~45~~ 41	

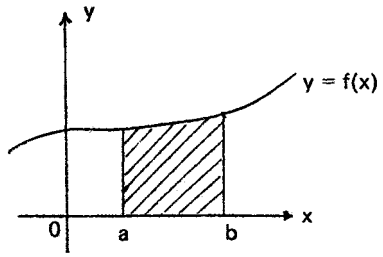
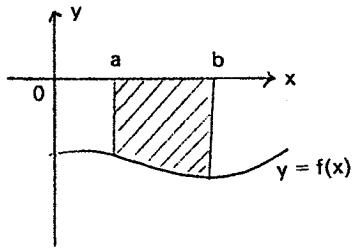
83

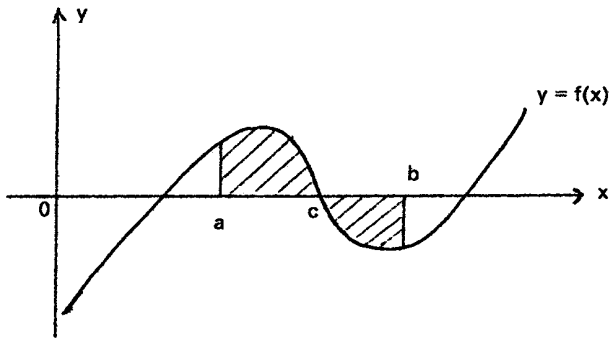
表示刪去的內容

單元 B6：積分法的應用

特定目標：

1. 學習應用定積分來計算平面面積、弧長及旋轉體的體積及旋轉曲面面積。
2. 應用定積分計算和的極限。

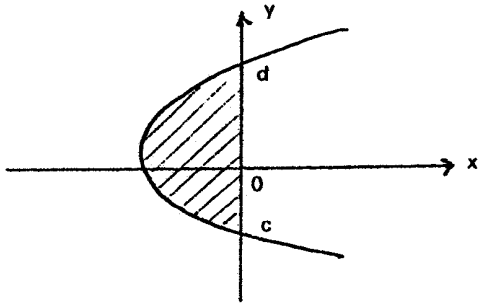
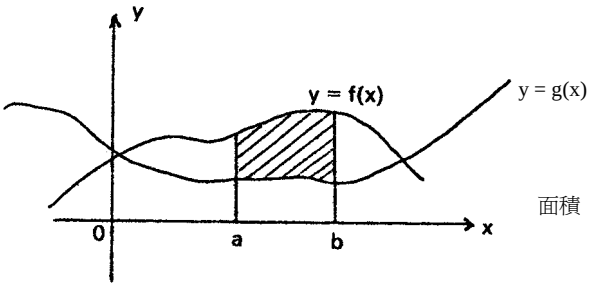
內容	時間分配	教學建議
6.1 平面面積	5	作爲定積分定義的延續，由曲綫 y = f(x)、垂直綫 x = a、x = b 及 x－軸包圍的面積可以根據有關函數的性質(即函數圖像在 x－軸之上或之下)用下列方法計算出來。 情況(1)：當y = f(x)在區間[a，b]內連續及非負，則面積可以下式表示 $\int_a^b f(x)dx$  情況(2)：當 y=f(x)在區間[a，b]內連續及非正，則面積可以下式表示 $-\int_a^b f(x)dx$ 

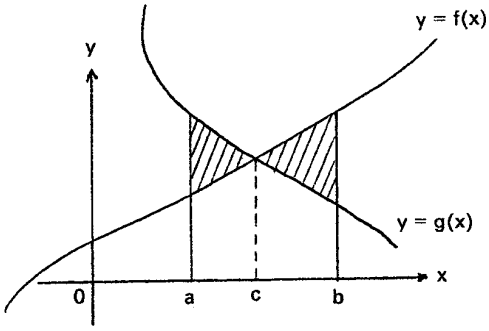
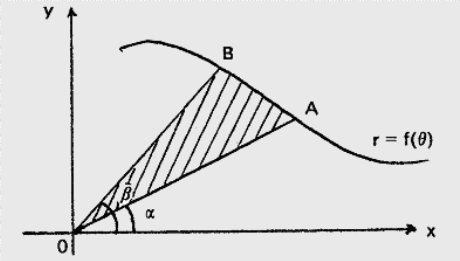
內容	時間分配	教學建議
		情況(3)：當 y = f(x)在區間[a，b]內連續及取值時正時負，則可以下列簡例的程序求其面積。  面積表示式爲 $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ 。 教師宜提醒學生在計算圖像在 x－軸之下的面積時應留意加入負號，並應鼓勵學生先作函數草圖以獲得更清晰的了解。

84

85

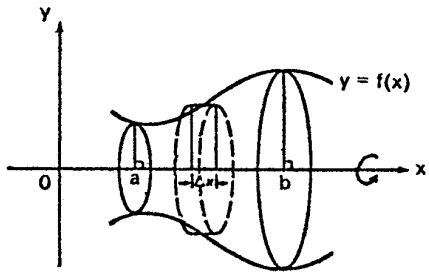
表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		教師也應就曲綫圖像與 y－軸所圍成的面積的各個不同情況詳加闡釋， 下面是一個例子。  面積表示式爲 $-\int_c^d x\,dy$ 。 至於由兩條曲綫所圍成的面積的計算，教師可與學生詳細討論下列圖示的方法及其變着，並應利用足夠的例子加以說明。  面積 = $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

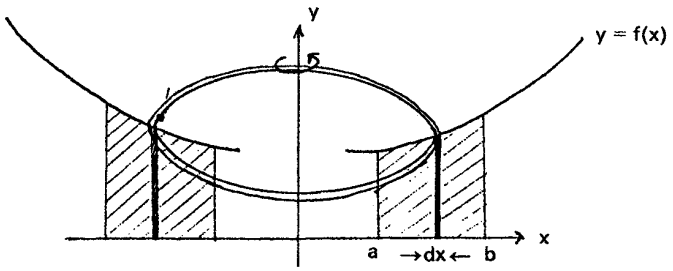
內容	時間分配	教學建議
		 面積= $\int_a^c [g(x)-f(x)]dx$ + $\int_c^b [f(x)-g(x)]dx$ 當曲綫以極方程 r = f(θ) 表示，則曲綫與兩半徑圍成的面積爲 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ 。 

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		當曲綫以參數方程形式表示時，例如 x = x(t)；y = y(t)，則所圍成的面積以下式表示 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$ ，其中 A 及 B 點的參數分別爲 t_0 及 t_1。 要令學生掌握計算面積的技巧，教師宜引入更多例子，包括不同方法及其變着，使學生有更深入的了解。下列例子可加入考慮： (1) 求拋物綫 $y^2 = 5-x$ 及直綫 y = x+1 所圍成的面積。（註：此面積可以對 x 或對 y 積分而求得，教師宜示範兩個方法。） (2) 證明心臟綫 $r = a(1+\cos\theta)$ 所圍成之面積爲 $\frac{3a^2\pi}{2}$ 。 (3) 利用橢圓的參數方程 $x = a\cos\theta$；$y = b\sin\theta$，證明橢圓的面積爲πab。（註：教師宜指導學生利用圖像的特別幾何性質，例如對稱性質，去簡化計算過程。）
88 **6.2 弧長**	3	曲綫 y = f(x)在兩點 x = a 及 x = b 之間的弧長以 $\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表示。 若曲綫以參數形式 x = x (t)；y = y (t)表示，則由 $t = t_1$ 至 $t = t_2$ 之間的弧長爲 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$ 。 若曲綫以極形式 r = r(θ)表示，則由 $\theta = \alpha$ 至 $\theta = \beta$ 之 間的弧長爲 $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$。 教師可用下列建議的例子作說明或與學生討論之用。 (1) 證明閉合曲綫（星形綫）$x = a\cos^3\theta$ ； $y = a\sin^3\theta$的周界爲 6a。 (曲綫圖形的對稱性可加利用) (2) 證明心臟綫 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的周界長度爲 4a。 (3) 求曲綫 $x^3 = 8y^2$ 由 x = 1 至 x = 3 的弧長。

內容	時間分配	教學建議
		(註：教師在選擇曲綫作示範用途時，宜留意與橢圓有關的例子，在可能範圍內應與學生作簡短的討論，藉以擴闊他們對數學其他支派的認識。教師可參考下列方法，並作簡單介紹： 對橢圓 $x = a\sin\theta$ ； $y = b\cos\theta$ ，恆有 $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=a^2(1-e^2\sin^2\theta)$ ， 其中 $e=\frac{b}{a}$ 爲離心率。由短軸一末端起計之弧長 s 是 $a\int_0^\phi\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta$。此積分不能以有限形式的初等函數表示，它是第二類的橢圓積分，並通常以 $E(e,\phi)$ 表示。 爲了完整起見，教師可引入第一類橢圓積分，即 $\int_0^\phi\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}$ ，它通常以 $F=(e,\phi)$ 表示。）
68 **6.3 旋轉體的體積**	4	在教授旋轉體的體積時，教師宜與學生討論旋轉體的形成及其意義，同時也應引入旋轉軸這名詞，好讓學生能認識及分辨由某個曲綫綫段或面積沿着某一旋轉軸旋轉而成的旋轉體，之後教師可教授下列兩個常用計算旋轉體的體積的方法： (1) 圓盤法 

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
90		教師宜向學生強調圓盤元素體積 ΔV 或 dV 的公式爲 $dV = \pi y^2 dx$ ，它代表圖盤的體積。整個固體的體積爲 $\pi\int_a^b y^2 dx$ 。教師更可向學生介紹曲綫沿 y－軸旋轉所形成的體積是 $\pi\int_c^d x^2\, dy$ 。 (2) 外殼法  在這裏，元素體積是 $2\pi xydx$ 及整體體積爲 $2\pi\int_a^b xydx$ 。 有些情形，旋轉體的體積可能由曲綫沿着 x－軸或 y－軸以外的綫旋轉或將兩曲綫圍成的面積旋轉所形成，所以教師宜利用例子將各種可能情況加以闡明，並推導下列公式供學生參考。 $\pi\int_a^b [[f(x)]^2 - [g(x)]^2]\, dx$ 或 $\pi\int_c^d [[f(y)]^2 - [g(y)]^2]\, dy$ 教師宜提供足夠的例子作說明，下列例子可作參攷。

內容	時間分配	教學建議
91 **6.4 旋轉體的表面面積**	4	(1) 證明由橢圓 $x = a\cos\theta$；$y = b\sin\theta$ 沿 x－軸旋轉所形成的體積是 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 。 (註：教師可要求學生從結果引申出半徑爲 r 的圓球體體積。) (2) 求將曲綫 $y=x^3$、直綫 x = 2 及 x－軸所圍成的面積沿直綫 x = 2 旋轉所形成的體積。 (註：教師可用圓盤法和外殼法兩個方法解這問題。) 將曲綫 y = f(x)上由 x = a 至 x = b 的弧沿 x－軸旋轉所產生的表面面積是 $2\pi\int_a^b y ds$ 其中 ds 是弧長的元素，該面積公式通常以 $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dx$ 表達。若同樣的弧長沿 y－軸旋轉，表面面積爲 $2\pi\int_c^d x ds$ 或 $2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\, dy$ 其中 c 及 d 分別爲該弧末端的縱坐標。 若曲綫以極形式表式並以θ爲自變量，則面積爲 $2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{d\theta}d\theta$ 其中 $y=r\sin\theta$及 $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$ 。同樣地，若曲綫以參數形式 x = x(t)；y = y(t)表示，由 $t = t_0$至 $t = t_1$之曲綫部分長度沿 x 一軸旋轉所形成的表面面積是 $2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\, dx$ 。 教師可與學生討論下列例子： (1) 證明拋物綫由原點至(4，4)的弧長沿 x－軸旋轉形成的表面面積爲 $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$ 。 (2) 證明心臟綫 $r = a(1+\cos\theta)$ 沿始綫旋轉所產生的表面面積爲 $\frac{32}{5}\pi a^2$ 。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(3) 證明旋輪線 $x = a(1-\sin\theta)$ ； $y = a(1-\cos\theta)$ 沿 x－軸旋轉所形成的表面面積爲 $\frac{64}{3}\pi a^2$ 。 (4) 證明星形線 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 沿 x－軸旋轉所形成的表面面積爲 $\frac{12}{5}\pi a^2$ 。
92 **6.5 和的極限**	4	這是一個應用定積分有趣的課題。教師宜利用一些簡單但明顯的例子如 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}$ 作爲引入，並提供適當的提示，使學生能發現合適的定積分、積分區間與恰當的分割，而最重要是能選取正確的被積函數，來表示無限級數的極限。對此例而言，被積函數爲 $f(x) = x$ ，區間爲[0 , 1] 而分割爲 0， $\frac{1}{n}$ ， $\frac{2}{n}$ ， $\frac{3}{n}$ ，… ， $\frac{n-1}{n}$ ，1。學生不難發現下列結果： $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$ $= \int_0^1 x\,dx$ $= \frac{1}{2}$ 教師可提供更多如下列之例子 (1) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}) = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ell n\ 2$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

內容	時間分配	教學建議
93		(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}})$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}})$ $= \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$ 務求使學生獲得更深入的了解及增進他們的運算技巧。下列是一個值得與學生討論的例子： 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 。先將它轉換爲 $\ell n\ y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ell n(\frac{i}{n})$ ，其中 $y = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $= \int_0^1 \ell n\ x\,dx$ $= -1$ 故得 $y = e^{-1}$ (註：教師教授此部分時，可令學生參考單元 B5，使他們能與黎曼和作爲和的極限聯系起來。) 教師必須提醒學生並不是所有和的極限都可用此法解答，調和級數， $\sum\frac{1}{n}$ ，是其中一個例子。
	~~20~~ 13	

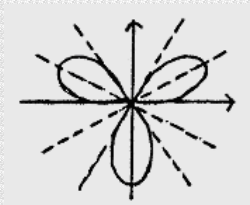
表示刪去的內容

單元 B7：解析幾何

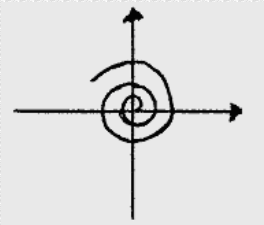
特定目標：

1. 學習除直角坐標外的另一種坐標系：極坐標。
2. 學習二次曲線。
3. 利用代數方法，學習解決軌跡問題。
4. 解決有關問題。

內容	時間分配	教學建議
7.1 基本解析幾何知識	5	學生除了對中學數學解析幾何內容有所認識外，學習此單元的其他課題應先掌握下列知識： (1) 外分點； (2) 直線圖形的面積 $\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$； (3) 求兩直線的交角時所用公式 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$； (4) 直線的法線式； (5) 兩直線之間的角平分線； (6) 直線族及 (7) 圓族。 學生應懂得極坐標系及直角坐標系之間的轉換，並應掌握曲線方程在兩個坐標系之間的轉換方法。 由極坐標轉爲直角坐標：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

內容	時間分配	教學建議
7.2 於極坐標系的曲綫描繪	4	由直角坐標轉爲極坐標：$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$，其中 $x \neq 0$，並且 θ 是由 (x, y) 所在的象限決定。 學生應懂得極坐標曲線方程的繪圖，因爲在「積分的應用」一課中需要對這種繪圖法有基礎認識，以下是一些學生應懂得繪畫的簡易極形式曲線方程： (1) 直線： $\theta = k$，其中 k 爲一正常數； $r\cos\theta = a$ (垂直於 x – 軸的直線) (2) 圓： $r = k$，其中 k 爲一正常數； $r = \sin\theta$ (3) 拋物線： $r = (1+\cos\theta) = k$，其中 k 爲一常數 (4) 心臟線： $r = a(1-\cos\theta)$，其中 a 爲一常數 (5) 玫瑰曲線： $r = a\sin 3\theta$ 

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
7.3 於直角坐標系的圓錐曲綫	7	(6) 螺線： $r = \theta$  學生應可以分別各圓錐曲線的標準方程，包括： $y^2 = 4ax$ (拋物線) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (橢圓) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (雙曲線) $xy = c^2$ (等軸雙曲線) 其參數表達形式亦應加以學習，包括： $y = r\sin\theta$； $x = r\cos\theta$ (橢圓) $y = b\sin\theta$； $x = a\cos\theta$ (橢圓) $y = b\tan\theta$； $x = a\sec\theta$ (雙曲線) $y = \frac{c}{t}$； $x = ct$ (等軸雙曲線) $y = 2at$； $x = at^2$ (拋物線) 對雙曲線的漸近線亦需要有所認識，而對圓錐曲線的其他性質例如離心率、焦點及準線等亦可教授但不需特別強調。

96

內容	時間分配	教學建議
7.4 圓錐曲綫的切綫及法綫	6	學生應懂得運用不同方法去找出圓的切線。經過簡單圓形 $x^2 + y^2 = a^2$ 上一點 (x_1, y_1) 的切線方程爲 $x_1x + y_1y = a^2$，其法線方程則爲 $x_1y - y_1x = 0$。這些基本結果的導數亦可在此介紹以啓發學生思考及計算如以下的例子以強調其基礎方法： 計算經過圓形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一點(x_1, y_1) 的切線方程， (i) 可利用切線與圓形半徑的垂直關係； (ii) 設切線方程爲 $y = mx+k$，利用聯立方程 $\begin{cases} y = mx + k \\ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \end{cases}$ 有等根的關係。 並應注意到方法(ii)是可以應用於一點 (x_1, y_1) 不在圓形的情況上。在此可以得到經過圓形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一點 (x_1, y_1) 的切線方程爲 $x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$。若將其結果普及，應可得到下列結果： (a) 經過拋物線 $y^2 = 4ax$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $y_1y = 2a(x + x_1)$ (b) 經過橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (c) 經過雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ (d) 經過等軸雙曲線 $xy = c^2$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $y_1x + x_1y = 2c^2$ 在找到切線方程後，學生應對法線方程問題上不會有任何因難的。 當二次曲線方程是以參數式表達時，其有關的結果亦應考慮。教師應引導學生找出下列結果： (a) 拋物線 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 的切線方程爲 $y = \frac{x}{t} + at$ (b) 橢圓 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 的切線方程爲 $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ (c) 雙曲線 $\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ 的切線方程爲 $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$

97

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(d) 等軸雙曲線 $\begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t} \end{cases}$ 的切線方程爲 $x + t^2 y = 2ct$ 。 爲了使到學生能理解基本概念，並能掌握和運用所學技巧，切點弦的基本概念亦應予以討論。
7.5 於直角坐標系的軌跡問題	5	學生應對一組能夠符合一系列的限制條件而又能利用直角坐標方程來表達的點的軌跡方程加以學習，例如： (1) 當一點與一固定點的距離不變，其移動的軌跡爲一圓形。 (2) 當一點與一固定點及一固定直線之間的距離相等，其移動的軌跡爲一拋物線。 (3) 當圓形在一直線上滾動時，圓周上一點的軌跡爲旋輪線。
7.6 平面曲綫的切綫及法綫	4	當學習了微分學後，學生應可應用微分法去計算平面曲線在直角坐標系上的切線和法線方程。利用微分公式及鏈式法則，學生應可找出以隱函數式或參數式定義的曲線的切線和法線方程。教師應當在這課題上作出適當安排，因應學生的能力，將這個單元作爲微分學的深入應用前的引例，或作爲基本微分學應用的延續。
	~~31~~ 27	

表示刪去的內容

這是空白頁